Matematiikka – PITKÄ 24.3.2010

1. a) $7x^7 + 6x^6 = 0$

$x^6(7x + 6) = 0$

$x^6 = 0$ tai $7x + 6 = 0$

$x = 0$ tai $x = -\frac{6}{7}$

b) $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$

$= a + 2\sqrt{a} + 1 - a - 1$

$= 2\sqrt{a}$

c) $\frac{3}{3 - 2x} < 0$ Määrittely $3 - 2x \neq 0$

$x \neq \frac{3}{2}$

Koska osoittaja $= 3 > 0$, niin

on oltava $3 - 2x < 0$

$-2x < -3 \quad || : (-2)$

$x > \frac{3}{2}$

---

2. a) $\int_0^1 (e^x + 1)\,dx = \Big/_0^1 (e^x + x) = e^1 + 1 - (e^0 + 0)$

$= e + 1 - 1$

$= e$

b)

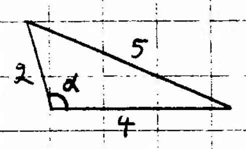
$D\, x \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$

$= \sin x + x \cos x$

c) Olkoon kysytty luku a, $a > 0$.

$\log_2 a = 5 \iff a = 2^5 \iff a = 32$

3. a) Mallikuv



Suurin kulma on pisimmän sivun (=5) vastainen kulma. Kosinilauseella

$5^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$

$16 \cos\alpha = -5$

$\cos\alpha = -\frac{5}{16} \quad \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{16}\right)$

$\alpha = 108{,}209\ldots^\circ$

Vast: Suurin kulma $\alpha \approx 108{,}2^\circ$

b) $x^2 + px + q = 0$, kun $x_1 = -2 - \sqrt{6}$ ja $x_2 = -2 + \sqrt{6}$.

$$\begin{cases} (-2 - \sqrt{6})^2 + p(-2 - \sqrt{6}) + q = 0 \\ (-2 + \sqrt{6})^2 + p(-2 + \sqrt{6}) + q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 4\sqrt{6} + 6 + (-2 - \sqrt{6})p + q = 0 \\ 4 - 4\sqrt{6} + 6 + (-2 + \sqrt{6})p + q = 0 \quad || \cdot (-1) \end{cases}$$

$+$

$8\sqrt{6} - 2\sqrt{6}\,p = 0$

$p = \frac{8\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{8}{2} = 4$

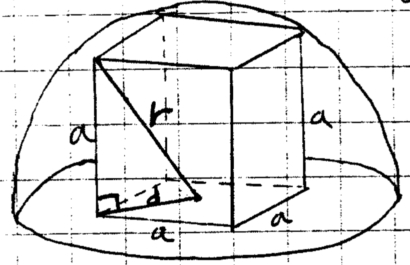
S:i. $4 - 4\sqrt{6} + 6 + (-2 + \sqrt{6}) \cdot 4 + q = 0$

$4 - 4\sqrt{6} + 6 - 8 + 4\sqrt{6} = -q$

$q = -2$

Vast: $p = 4$ ja $q = -2$

4.



Olkoon kuution särmä $= a$.
Kuution pohjan keskipiste on myös puolipallon pohjaympyrän keskipiste.

r = puoliympyrän säde

$$d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$d^2 + a^2 = r^2$$

$$r^2 = \frac{2a^2}{4} + a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$r = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{3}{2}}\,a$$

$$\frac{V_{kuutio}}{V_{puolipallo}} = \frac{a^3}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$= \frac{a^3}{\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,a^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\pi}$$

$$= 0{,}25989\ldots \approx \underline{\underline{26\%}}$$

Vastaus: Kuution tilavuus on 26% puolipallon tilavuudesta

5. $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ ja $\bar{b} = x_2\bar{i} + 0\bar{j} = x_2\bar{i}$, $x_2 \neq 0$

$$\bar{a} + \bar{b} = 4\bar{i} + \bar{j}$$

$$(x_1 + x_2)\bar{i} + y_1\bar{j} = 4\bar{i} + \bar{j}$$

$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4 - x_1$

$\underline{y_1 = 1}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 4$$
$$x_1x_2 + y_1\cdot 0 = 4$$
$$x_1x_2 = 4$$
$$x_1(4 - x_1) = 4$$
$$4x_1 - x_1^2 = 4$$
$$x_1^2 - 4x_1 + 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm 0}{2}$$

$\underline{x_1 = 2}$ $\qquad x_2 = 4 - x_1 = 4 - 2 = \underline{2}$

Vast: $\underline{\underline{\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}}}$ ja $\underline{\underline{\bar{b} = 2\bar{i}}}$

---

6. a) P(Pallot erivääriset) = P(1. pallo kumpi vain ja 2. pallo eri)

$$= \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

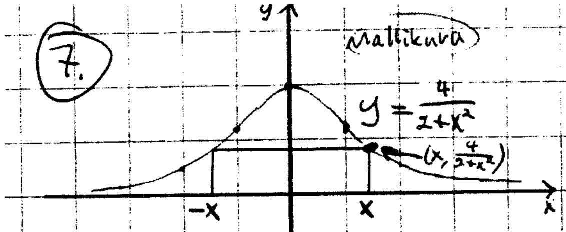
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) P(Pallot erivääriset) = P(1. pallo mikä vain ja 2. pallo eri)

$$= \frac{3}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

(7.)



Määrittely: $\mathbb{R}$ $(2+x^2 \neq 0)$

Kägrä on y-aks. suhteen symmetrinen.

Pinta-ala $A(x) = 2xy = 2x \cdot \frac{4}{2+x^2}$, $x > 0$

$$= \frac{8x}{2+x^2}$$

$$A'(x) = \frac{8(2+x^2) - 8x \cdot 2x}{(2+x^2)^2}$$

$$= \frac{-8x^2+16}{(2+x^2)^2}$$

$A'(x) = 0 \iff -8x^2 + 16 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	
$A'(x)$	$-$		$+$	$-$
$A(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$

$A'(-2) = -\frac{4}{9} < 0$

$A'(0) = 4 > 0$

$A'(2) = -\frac{4}{9} < 0$

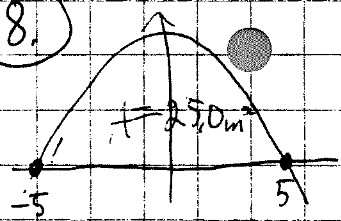
$$\left(\lim_{x \to -\infty} A(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{8x}{2+x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{8x}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{\frac{8}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0} + 1} = 0 \right)$$

$\Rightarrow$ Ala on suurin, kun $x = \sqrt{2}$. $\Rightarrow$ kanta $2x = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow y = \frac{4}{2+\sqrt{2}^2} = \frac{4}{4} = 1$. = korkeus

Vastaus: Suorakulmion sivut ovat $2\sqrt{2}$ ja 1.

(8.)



$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

$f(-5) = 0 \iff 25a - 5b + c = 0$

$f(5) = 0 \iff 25a + 5b + c = 0$

$\Rightarrow b = 0$

$$\int_{-5}^{5} ax^2 + bx + c \, dx = 25$$

$$\Big/_{-5}^{5} \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx = 25$$

$$\frac{125}{3}a + \frac{25}{2}b + 5c - \left(-\frac{125}{3}a + \frac{25}{2}b - 5c\right) = 25$$

$\frac{250}{3}a + 10c = 25 \quad || \cdot 3$

$250a + 30c = 75$

$$\begin{cases} 25a + c = 0 & || \cdot (-10) \\ 250a + 30c = 75 \end{cases}$$

$+$

$20c = 75$

$c = \frac{15}{4}$

$25a + \frac{15}{4} = 0$

$a = -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{25} = -\frac{3}{20}$

$\Rightarrow$ korkeus $\frac{15}{4}$ m $= 3{,}75$ m

9. $3\tan x - 1 = 4x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Merkitään $f(x) = 3\tan x - 4x - 1$, f jatkuva ja derivoituva

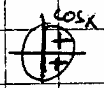
$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4$

$f'(x) = 0$

$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{3}$ $(\cos^2 x \neq 0)$

$4\cos^2 x = 3$

$\cos^2 x = \frac{3}{4} \iff \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



$x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$. Nollakohdista välille $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ kuuluvat vain $-\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{\pi}{6}$.

	$-\frac{\pi}{2}$ … $-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$ … $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ … $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f'(-\frac{\pi}{3}) = 8 > 0$

$f'(0) = -1 < 0$

$f'(\frac{\pi}{3}) = 8 > 0$

$\begin{cases} f(-\frac{\pi}{6}) \approx -0{,}64 < 0 \\ \text{koska f on aidosti kasvava välillä } \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[\end{cases}$

→ Ei nollakohtaa välillä $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$.

$f(\frac{\pi}{6}) \approx -1{,}36$ ja f aidosti vähenevä välillä $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$

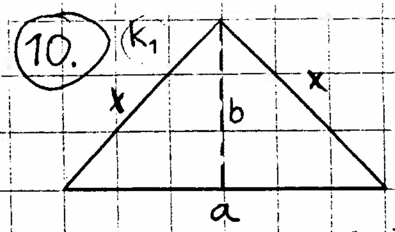
⇒ Ei nollakohtaa välillä $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$.

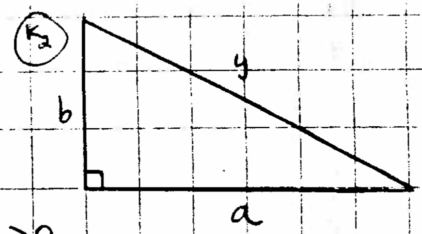
$f(\frac{\pi}{3}) \approx 0{,}007 > 0$ ja f aidosti kasvava välillä $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

f:llä tasan 1 nollakohta välillä $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

⇒ Yhtälöllä $3\tan x - 1 = 4x$ on tasan yksi juuri välillä $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

10.





a ja b > 0

$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$

$y^2 = a^2 + b^2$

$y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$

Merkitään piirit yhtäsuuriksi

$P_{K_1} = P_{K_2}$

$\cancel{a} + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \cancel{a} + b + \sqrt{a^2 + b^2} \quad \|\ ()^2$ mol. puol. > 0

$4\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right) = b^2 + 2b\sqrt{a^2 + b^2} + (a^2 + b^2)$

$a^2 + 4b^2 = a^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{a^2 + b^2} \quad \| -a^2 - 2b^2$

$2b^2 = 2b\sqrt{a^2 + b^2} \quad \| : 2$

$b^2 = b\sqrt{a^2 + b^2} \quad \|\ ()^2$ mol. puol. > 0

$b^4 = b^2(a^2 + b^2)$

$b^4 = b^4 + b^2a^2$

Yhtälö pätee vain, kun $a = 0$ tai $b = 0$, mutta $a > 0$ ja $b > 0$, joten yhtäsuuruus ei päde. Näin ollen $b^4 < b^4 + b^2a^2$ ja siten K_2:n piiri on pidempi.

Vastaus: Kolmion K_2 piiri on pidempi

11. Olkoon Geometrinen sarja $a_1 + \frac{3}{8} + \dots = 2$.

$$q = \frac{\frac{3}{8}}{a_1} = \frac{3}{8a_1}$$

. koska sarja suppenee on oltava $-1 < \frac{3}{8a_1} < 1$

Suppenevan Geometrisen sarjan summa $= \frac{a_1}{1-q}$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{1 - \frac{3}{8a_1}} = 2$$

$$\frac{a_1}{\frac{8a_1 - 3}{8a_1}} = 2$$

$$\frac{8a_1^2}{8a_1 - 3} = 2 \iff 8a_1^2 = 16a_1 - 6$$

$$8a_1^2 - 16a_1 + 6 = 0$$

$$a_1 = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 6}}{2 \cdot 8} = \frac{16 \pm 8}{16} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

kun $a_1 = \frac{3}{2}$, niin $q = \frac{3}{8 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \in]-1,1[$

kun $a_1 = \frac{1}{2}$, niin $q = \frac{3}{8 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \in]-1,1[$

<u>Vastaus:</u> Sarja ~~t~~, jossa $a_1 = \frac{3}{2}$ ja suhdeluku $q = \frac{1}{4}$ sekä sarja, jossa $a_1 = \frac{1}{2}$ ja suhdeluku $q = \frac{3}{4}$.

12. P alkuluku > 3.

$$p^2 - 1 = p^2 - 1^2 = (p-1)(p+1)$$

1°) $\Rightarrow$ Luvuista $p-1$, p ja $p+1$ yksi on jaollinen kolmella (3 perättäistä kok.lukua).
P on alkuluku ja ei siten jaollinen 3:lla.
$\Rightarrow$ $p-1$ tai $p+1$ on jaollinen 3:lla.

2°) Koska p on alkuluku, se ei ole jaollinen 2:lla.
edeltävänä ja seuraavana kokonaislukuna $p-1$ ja $p+1$ ovat parillisia TS.
$p-1 = 2k$ ja $p+1 = 2s$, $k, s \in \mathbb{Z}_+$

$\Rightarrow (p-1)(p+1) = 2k \cdot 2s = 4ks$, joka jaollinen 4:llä

1°) ja 2°) $\Rightarrow$ Luku $p^2 - 1$ on jaollinen 3:lla ja 4:llä ja siten myös $3 \cdot 4 = 12$:lla $\square$

13. $f(x) = \ln x$ Kaarenpituus välillä $[1,2]$.

Jakovälien päätepisteet ovat $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{7}{4}$ ja $x_4 = 2$.

Jakovälin pituus $h = \frac{1}{4}$.

$$\int_1^2 \underbrace{\sqrt{1+f'(x)^2}}_{\text{merk. } g(x)}\,dx = \int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$\approx h\left[\tfrac{1}{2}g(x_0) + g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + \tfrac{1}{2}g(x_4)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{1^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{(\frac{5}{4})^2}} + \ldots + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}\right]$$

$$= 1{,}22508\ldots \approx \underline{\underline{1{,}225}}$$

***14.** $a_1 = \frac{9}{10}$, $a_2 = \frac{99}{100}$, $a_3 = \frac{999}{1000}$, ...

a) $a_n = \underline{\underline{\frac{10^n - 1}{10^n}}} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{10^n}}}$

b) $a_{n+1} - a_n$

$= \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

$= -\frac{1}{10^{n+1}} + {}^{10)}\frac{1}{10^n}$

$= \frac{10-1}{10^{n+1}}$

$= \frac{9}{10^{n+1}} > 0$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$ kaikilla $n = 1,2,3,\ldots$

$\Rightarrow$ Jono a_n on kasvava.

$a_n - 1 = 1 - \frac{1}{10^n} - 1$

$= -\underbrace{\frac{1}{10^n}}_{>0} < 0$

$\Rightarrow a_n - 1 < 0$

$\underline{\underline{a_n < 1}}$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$

$\Rightarrow$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ $\frac{1}{10^n} \to 0$, kun $n \to \infty$; $10^n \to \infty$, kun $n \to \infty$

$= 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$

d) $0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$

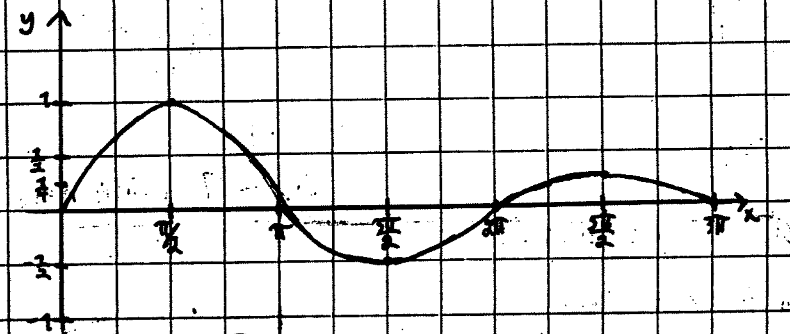
Geom. sarjan summa ($q = \frac{1}{10}$) $= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \underline{\underline{1}}$ Vast: $0{,}999\ldots = \underline{\underline{1}}$.

***15.** $f(x) = 2^{1-n}\sin x$, kun $x \in [(n-1)\pi, n\pi[$, $n = 1,2,3,\ldots$

a)

n	$[(n-1)\pi, n\pi[$	$f(x)$
$n=1$	$[0, \pi[$	$f(x) = 2^{1-1}\sin x = \sin x$
$n=2$	$[\pi, 2\pi[$	$f(x) = \frac{1}{2}\sin x$
$n=3$	$[2\pi, 3\pi[$	$f(x) = \frac{1}{4}\sin x$
$n=4$	$[3\pi, 4\pi[$	$f(x) = \frac{1}{8}\sin x$

Kuvaaja välillä $[0, 3\pi]$



15. jatkuu b)

$$\int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{1}{4}\sin x\,dx$$

$$= \Big/_0^{\pi} -\cos x + \Big/_{\pi}^{2\pi} -\frac{1}{2}\cos x + \Big/_{2\pi}^{3\pi} -\frac{1}{4}\cos x$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \left(-\frac{1}{2}\cos 2\pi\right) + \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{4}\cos 3\pi + \frac{1}{4}\cos 2\pi$$

$$= \underbrace{1+1}_{2} \underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}_{-1} \underbrace{+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$$

c)

$$\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \underbrace{2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot 2^{2-n}}$$

Geometrinen summa $\left(a_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, kun $n \to \infty$

$$= \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}$$