MAA YO-koe 23.3.2012.

1. a) $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2} \iff \underline{\underline{x = -2}} \text{ tai } \underline{\underline{x = 3}}$$

b) $$\frac{x}{6} - \frac{{}^{3)}x - 3}{2} - \frac{7}{9} = 0$$

$$\frac{x - 3x + 9}{6} = \frac{7}{9}$$

$$-18x + 81 = 42$$

$$-18x = -39$$

$$x = \frac{39^{(3}}{18} = \underline{\underline{\frac{13}{6}}} \quad \left(= 2\frac{1}{6}\right)$$

c) $$\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0 \qquad \text{Määrittely: } x \neq 0.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{x}$$

$$x^2 = 4$$

$$\underline{\underline{x = -2}} \text{ tai } \underline{\underline{x = 2}}.$$

2. a) $$\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2 = \frac{15}{4} - {}^{4)}4 = \frac{15}{4} - \frac{16}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

b) $$\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6 = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 6 = \sqrt{36} - 6 = 6 - 6 = \underline{\underline{0}}$$

c) $$\ln\frac{x}{2} + \ln 2 = \ln x - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} = \underline{\underline{\ln x}}, \quad x > 0$$

d) $$\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi) = \sin^2 x + \cos^2 x = \underline{\underline{1}}$$

kosinin jakso 2π — Trig. funktioiden Pythagoraan lause

e) $$\int_0^1 (x+1)\,dx = \Big/_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - 0 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

f) $$f(x) = 4e^{2x}$$

$$f'(x) = 4e^{2x} \cdot 2 = 8e^{2x}$$

$$f'(0) = 8e^{2 \cdot 0} = 8e^0 = 8 \cdot 1 = \underline{\underline{8}}$$

---

3. $A = (2,1)$, $B = (4,0)$ ja $C = (5,7)$.

$$|AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{(5-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$$

$$|BC| = \sqrt{(5-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1 \quad \text{(Pisin sivu!)}$$

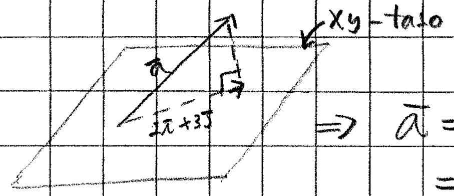
Tarkistetaan pythagoraan lauseella:

$$\sqrt{5}^2 + (3\sqrt{5})^2 = (5\sqrt{2})^2 \iff 5 + 45 = 50 \iff 50 = 50$$

Tosi $\Rightarrow$ Väite tosi!

4.

Mallikuva



$$\Rightarrow \quad \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \; ; \underbrace{x=2,\ y=3.}_{\text{Projektio xy-tasolla:}}$$

$$= 2\bar{i} + 3\bar{j} + z\bar{k}$$

$\bar{a}$:n pituus $|\bar{a}| = \sqrt{22}$

$$\sqrt{2^2+3^2+z^2} = \sqrt{22}$$

$$\sqrt{13+z^2} = \sqrt{22} \quad \| (\,)^2 \text{ mol. puol.} > 0!$$

$$13+z^2 = 22$$

$$z^2 = 9$$

$$z = \pm 3$$

$\Rightarrow$ Kysytyt vektorit ovat $\underline{\bar{a}_1 = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}}$ ja $\underline{\underline{\bar{a}_2 = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}}}$

5.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0. \quad \text{Jva ja derivoituva.}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

$f(x)$ on jatkuva funktio, kun $x > 0$.

Kulkukaavio:

	0 … e	e …
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

$$f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2} = 1 > 0$$

$$f'(3) = \frac{1-\ln 3}{3^2} \approx -0{,}01$$

Kulkukaavion perusteella $f(x)$:n suurin arvo on

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}} \quad (\approx 0{,}368)$$

6.

a) $P(\text{Ainakin yksi tekee maalin})$

$= 1 - P(\text{kukaan ei tee maalia})$

$= 1 - \underset{1-0{,}65}{0{,}35} \cdot \underset{1-0{,}75}{0{,}25} \cdot \underset{1-0{,}54}{0{,}46} = 0{,}95975$

$\approx 96\,\%$

b)

Maaleja (X)	Todennäköisyys	
0	$0{,}35 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}46$	$= 0{,}04025$
1	...	$= 0{,}24275$
2	...	$= 0{,}45375$
3	$0{,}65 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}54$	$= 0{,}26325$

$P(1 \text{ maali}) = P(\text{A tekee, muut ei tai B tekee, muut ei tai C tekee, muut ei})$

$= 0{,}65 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}46 + 0{,}35 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}46 + 0{,}35 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}54$

$= 0{,}24275$

$P(2 \text{ maalia}) = P(\text{A ja B, C ei tai B ja C, A ei tai A ja C, B ei})$

$= 0{,}65 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}46 + 0{,}75 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}35 + 0{,}65 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}25$

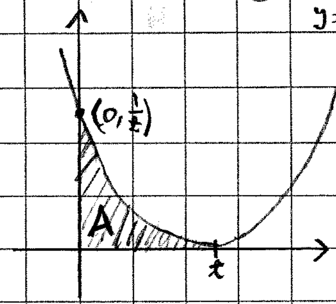
$= 0{,}45375$

Maalien lukumäärän odotusarvo $= \underline{\underline{1{,}94}}$

$E(X) = 0 \cdot 0{,}04025 + 1 \cdot 0{,}24275 + 2 \cdot 0{,}45375 + 3 \cdot 0{,}26325$

7.

Mallikuva



$y = ax^2 + bx + c = f(x)$

a) $f(0) = \frac{1}{t}$

$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = \frac{1}{t}$

$\underline{\underline{c = \frac{1}{t}}}$

$f'(x) = 2ax + b$

X-akselin sivuamispisteessä $f'(x) = 0$:

$f'(t) = 0$

$2at + b = 0 \quad \Rightarrow b = -2at$

sijoitus

$f(t) = 0 \iff at^2 + bt + \frac{1}{t} = 0$

$at^2 - 2at^2 + \frac{1}{t} = 0$

$-at^2 = -\frac{1}{t} \quad \| : t^2 \neq 0$

$\underline{\underline{a = \frac{1}{t^3}}}$

$\Rightarrow b = -2at = -2 \cdot \frac{1}{t^3} \cdot t \quad \Rightarrow \underline{\underline{b = -\frac{2}{t^2}}}$

b) $A = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \left(\frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}\right)dx$

$= \Big/_0^t \frac{1}{3t^3}x^3 - \frac{1}{t^2}x^2 + \frac{1}{t}x$

$= \frac{1}{3\cancel{t^3}}\cancel{t^3} - \frac{1}{\cancel{t^2}}\cancel{t^2} + \frac{1}{\cancel{t}}\cancel{t} - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow$ Ala on $\frac{1}{3}$ ja ei siis riipu parametrista t. $\square$

8. $f(t) = \dfrac{5000}{1+4999e^{-0,8t}}, \quad t \geq 0.$

a) $f(t) > 0,5 \cdot 5000 = 2500$

$$\frac{5000}{1+4999e^{-0,8t}} > 2500 \quad \| \cdot (1+4999e^{-0,8t}) \underline{> 0!}$$

$$5000 > 2500 + 12497500e^{-0,8t}$$

$$12497500e^{-0,8t} < 2500 \quad \| : 12497500$$

$$e^{-0,8t} < \frac{250\cancel{0}}{1249750\cancel{0}} \quad \| \ln$$

$$-0,8t < \ln\frac{25}{124975} \quad \| : -0,8$$

$$t > \frac{\ln\frac{25}{124975}}{-0,8} = 10,6462\ldots$$

Vastaus: Luennot peruuntuvat 11 vuorokauden kuluttua ensimmäisestä sairastumisesta.

b) $$f'(t) = \frac{0\cdot(1+4999e^{-0,8t}) - 5000\cdot(4999e^{-0,8t}\cdot(-0,8))}{(1+4999e^{-0,8t})^2}$$

$$= \frac{19996000e^{-0,8t}}{(1+4999e^{-0,8t})^2} > 0, \text{ kun } t > 0.$$

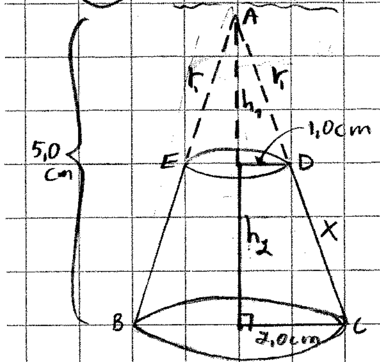
$\Rightarrow$ $f(t)$ on kasvava, kun $t > 0$. $\rightarrow$

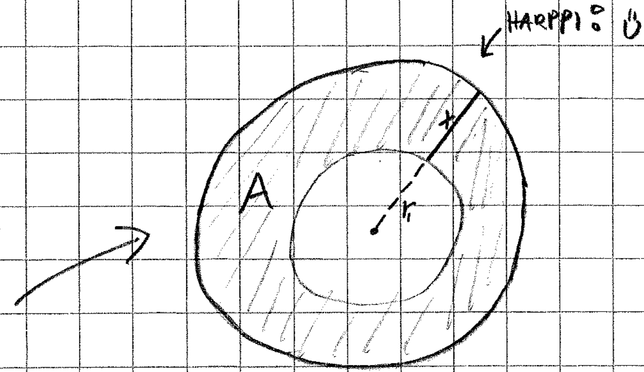
8. jatkuu

c) $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{5000}{1+4999\underbrace{e^{-0,8t}}_{\to 0,\text{ kun } t\to\infty}}$$

$$= \frac{5000}{1+0} = \underline{\underline{5000}}$$

9. Mallikuva:





(kolmiot)
Kartiot ABC ja AED ovat yhdenmuotoiset (KK-lause, Yhteinen ∢A ja samankohtaiset kulmat ∢C ja ∢D)

$$\Rightarrow \frac{r_1}{1,0} = \frac{r_1 + x}{2,0}$$

$$2r_1 = r_1 + x$$

$$\underline{r_1 = x}$$

Kysytty ala:

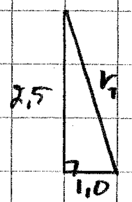
$$A = \pi(r_1+x)^2 - \pi r_1^2 \quad \| r_1 = x \,!!$$

$$= \pi(2r_1)^2 - \pi r_1^2$$

$$= 3\pi r_1^2$$

↳ Vastaavasti $\underline{h_1 = h_2} = \frac{5,0}{2} = 2,5$ cm. $\rightarrow$

9. Jatkuu



$\Rightarrow r_1^2 = 1{,}0^2 + 2{,}5^2$

$r_1 = \sqrt{7{,}25}$

Kysytty ala $A = 3\pi r_1^2 = 3\pi \cdot 7{,}25$

$= 21{,}75\pi$

$= 68{,}3296\ldots$

$\approx 68\ (\text{cm}^2)$

---

10. a) $3\tan\frac{x}{2} + 3 = 0 \quad \| :3$

$\tan\frac{x}{2} = -1$

$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + n\cdot\pi \quad \| \cdot 2$

$x = \frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

b) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0 \quad \| \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$

$-2\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0 \quad \|$ merkitään $t = \cos x$

$\Longrightarrow$

10. Jatkuu

$-2t^2 + 3t - 1 = 0$

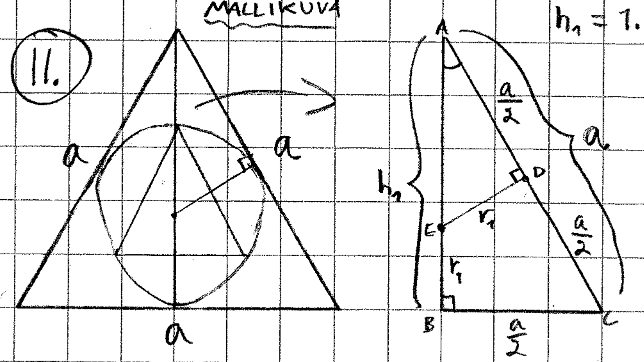
$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-1)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-3 \pm 1}{-4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ tai $\cos x = 1$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ tai $x = n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

11.

MALLIKUVA



h_1 = 1. kolmion korkeus:

$h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$h_1^2 = \frac{3}{4}a^2$

$h_1 = \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ensimmäisen ympyrän säde r_1 yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja ADE:

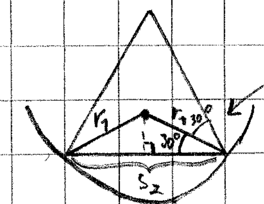
$\frac{r_1}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{h_1} \Leftrightarrow \frac{r_1}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \quad \| \cdot \frac{a}{2}$

$r_1 = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

$\longrightarrow$

11. Jatkuu...

Seuraavan kolmion K_2 sivu s_2:



Kaikilla ympyröillä on sama keskipiste. Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat samassa pisteessä, joka on sisään piirretyn (ja nyt myös ulkopuolelle) ympyrän keskipiste (mm. MAOL s. 29)

⇒ Kantakulman puolikas = 30°, sillä kolmio on tasasivuinen (kulmat 60°).

$$\Rightarrow \cos 30° = \frac{\frac{s_2}{2}}{r_1} \Leftrightarrow s_2 = 2r_1 \cdot \underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$s_2 = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{1}{2} a$$

Näin ollen seuraavan kolmion sivu on $\frac{1}{2}$ edellisestä kolmion sivusta ja sisään piirretyn ympyrän säde $\frac{\sqrt{3}}{6}$-kertainen kolmion sivuun nähden.

⇒ Kolmioiden sivut ovat $a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a, \ldots$

⇒ Ympyröiden säteet ovat $\frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{4}a, \ldots$

⟹

11. Jatkuu...

Ympyröiden alojen summa A_s

$$A_s = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2}a\right)^2 + \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{4}a\right)^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{12}\pi a^2 \underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots\right)}_{\text{Suppeneva geometrinen sarja}}$$

$\hookrightarrow |q| = |(\frac{1}{2})^2| = |\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} < 1$

$$= \frac{1}{12}\pi a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \qquad \left(S = \frac{a_1}{1-q}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\pi a^2 \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \frac{\pi}{9} a^2$$

(12.) a) $3(d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + d_2 + d_4 + \ldots$

$= 3(1+2+8+5+0+2) + 4 + 6 + 2 + 9 + 3 + d_{12}$

$= 3 \cdot 18 + 24 + d_{12}$

$= 78 + d_{12}$

Tälle pätee $78 + d_{12} \equiv 0 \pmod{10}$

eli Jaettaessa $(78 + d_{12})$ 10:llä on jakojäännös 0.

$\Rightarrow$ Oltava $d_{12} = 2$, sillä $80 \equiv 0 \pmod{10}$.

b) $3(1+3+5+7+9+2) + 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3$

$= 3 \cdot 27 + 24$

$= 105$

koodi on virheellinen, sillä $105 \equiv 5 \pmod{10}$,

mutta $105 \not\equiv 0 \pmod{10}$.

$\longrightarrow$

12. JATKUU...

c) Poistetaan tarkistusehdosta virheellisen 3. merkin vaikutus

$105 - 3 \cdot "d_3" = 105 - 3 \cdot 3 = 96$

Oikealle merkille pätee $96 + 3 \cdot d_3 \equiv 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow d_3 = 8$, sillä $96 + 3 \cdot 8 = 120 \equiv 0 \pmod{10}$.

$\Rightarrow$ oikea koodi on $(1,2,8,4,5,6,7,8,9,1,2,3)$

(13.) $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3\cos x$.

$f(x) = g(x)$

$1 - x = 3\cos x$

$\underbrace{3\cos x + x - 1}_{h(x)} = 0$ $\qquad h'(x) = -3\sin x + 1$

Käytetään Newtonin menetelmää, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, h(x):n nollakohtien selvittämiseen.
Piirretään h(X):n kuvaaja laskimella ja katsotaan siitä sopivat alkuarvaukset

$\Longrightarrow$

13. JATKUU...

$X_0 = -0,8$ (Alkuarvaus)

$$X_1 = X_0 - \frac{h(X_0)}{h'(X_0)} = -0,8 - \frac{3\cos(-0,8) - 0,8 - 1}{-3\sin(-0,8) + 1}$$

$$= -0,8920\ldots$$

$$X_2 = X_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} = -0,8894\ldots$$

$X_3 = -0,8894\ldots$ (Vastaavasti iteroiden!)

$\Rightarrow \underline{\underline{X \approx -0,89}} \quad \Rightarrow y = f(-0,8894\ldots)$

$y = 1,88947\ldots$

$\underline{\underline{y \approx 1,89}}$

Vastaavasti muut nollakohdat:

$X_0 = 1,8$ (Alkuarvaus)

$X_1 = 1,86161\ldots$ (Newtonilla kuten yllä!)

$X_2 = 1,86236\ldots$

$X_3 = 1,86236\ldots \quad \Rightarrow \underline{\underline{X \approx 1,86}} \quad \Rightarrow y = -0,8623\ldots$

$\underline{\underline{y \approx -0,86}}$

$X_0 = 3,8$ (Alkuarvaus)

$X_1 = 3,6493\ldots$

$X_2 = 3,6380\ldots$

$X_3 = 3,6379\ldots$

$X_4 = 3,6379\ldots \quad \rightarrow \underline{\underline{X \approx 3,64}} \quad \Rightarrow y = -2,6379\ldots$

$\underline{\underline{y \approx -2,64}}$

Vast: Leikkauspisteiden koordinaatit ovat $(-0,89; 1,89)$, $(1,86; -0,$) ja $(3,64; -2,64)$

*14) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ja $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

a) $$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}e^{2x}} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{x-x}}_{=1} + \cancel{\frac{1}{4}e^{-2x}} - \cancel{\frac{1}{4}e^{2x}} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{x-x}}_{=1} - \cancel{\frac{1}{4}e^{-2x}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}} \quad \square$$

b) $$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x} \cdot \underbrace{D(-x)}_{=-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \underline{\underline{\cosh x}} \quad \square$$

c) Edellisen kohdan perusteella $\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ > 0 kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\sinh x$ on aidosti kasvava funktio

$\Rightarrow$ käänteisfunktio on olemassa. $\square$

Merkitään $y = f(x) = \sinh x$. käänteisfunktio $= f^{-1}(x)$.

Ratkaistaan yhtälöstä x:

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \| \cdot 2$$

$$2y = e^x - e^{-x} \quad \| \cdot e^x \ (\neq 0)$$

$\Longrightarrow$

*14 JATKUU...

$$2ye^x = (e^x)^2 - 1$$

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2}$$

$$e^x = y \overset{+}{\cancel{-}} \underbrace{\sqrt{y^2+1}}_{>y} \quad e^x > 0 \,!$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad \| \ln$$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$\Rightarrow$ x:n funktiona $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

d) $$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{2}\left(\overset{\to 0}{e^{x}} - \overset{\to\infty}{e^{-x}}\right) = -\infty$$

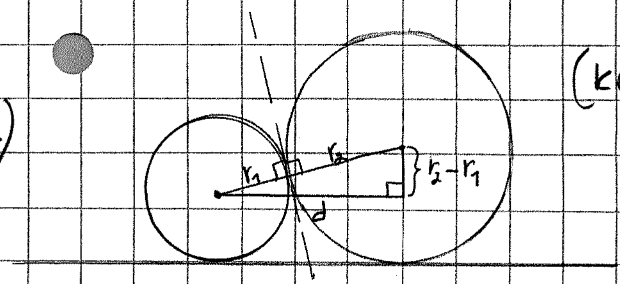
$$\lim_{x\to\infty} \sinh x = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(\overset{\to\infty}{e^{x}} - \overset{\to 0}{e^{-x}}\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ Funktion $f(x) = \sinh x$ arvojoukko on $]-\infty, \infty[\; = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ määrittelyjoukko $= \mathbb{R}$.

*15.

a)



(KUVA 1)

Ympyröillä on sivuamispisteessä yhteinen tangentti.

$$d^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

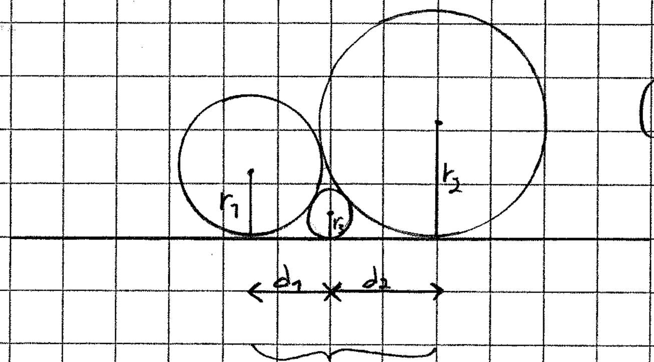
$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$d^2 = \cancel{r_1^2} + 2r_1r_2 + \cancel{r_2^2} - \cancel{r_2^2} + 2r_1r_2 - \cancel{r_1^2}$$

$$d^2 = 4r_1r_2 \quad \| \sqrt{\ }$$

$$d = \overset{+}{\cancel{-}} 2\sqrt{r_1 r_2}$$

b)



(kuva 2)

$$d = d_1 + d_2$$

$\longrightarrow$

15. JATKUU...

$$d_1 + d_2 = d \quad \| \text{ a)-kohdan perusteella}$$

$$2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_2 r_3} = 2\sqrt{r_1 r_2} \quad \| :2 \text{ ja } ()^2 \text{ mol. puol} > 0$$

$$r_1 r_3 + 2\sqrt{r_1 r_2 r_3^2} + r_2 r_3 = r_1 r_2$$

$$r_1 r_3 + 2r_3\sqrt{r_1 r_2} + r_2 r_3 = r_1 r_2$$

$$r_3\left(r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2\right) = r_1 r_2 \quad \| :\underbrace{(\quad)}_{>0}$$

$$r_3 = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1}^2 + 2\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2}^2}$$

$$\underline{\underline{r_3 = \frac{r_1 r_2}{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2}}}$$

→

15 c) Väite: $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$.

Tod. Yhtälön vasen puoli:

$$(k_1 + k_2 + k_3)^2$$

$$= \left(\frac{\overset{r_2)}{1}}{r_1} + \frac{\overset{r_1)}{1}}{r_2} + \frac{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2}{r_1 r_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{r_1 + r_2 + \left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2}{r_1 r_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{r_1 + r_2 + r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2}{r_1 r_2}\right)^2$$

$$= \left(2 \cdot \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2}}{r_1 r_2}\right)^2$$

$$= 4\,\frac{\left(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2}\right)^2}{r_1^2 r_2^2}$$

$$= 4\,\frac{(r_1 + r_2)^2 + 2(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_2}^2}{r_1^2 r_2^2}$$

$$= 4\,\frac{r_1^2 + r_2^2 + 3r_1 r_2 + 2r_1\sqrt{r_1 r_2} + 2r_2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1^2 r_2^2}$$

→

15 c) JATKUU...

Yhtälön oikea puoli:

$$2\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^4}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + \left(r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2\right)^2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + \left(r_1 + r_2\right)^2 + 2\left(r_1 + r_2\right)\cdot 2\sqrt{r_1 r_2} + 4 r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2 + 4\left(r_1 + r_2\right)\sqrt{r_1 r_2} + 4 r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2 r_1^2 + 2 r_2^2 + 6 r_1 r_2 + 4 r_1 \sqrt{r_1 r_2} + 4 r_2 \sqrt{r_1 r_2}}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + 3 r_1 r_2 + 2 r_1 \sqrt{r_1 r_2} + 2 r_2 \sqrt{r_1 r_2}}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

= Yhtälön vasen puoli! □