Pitkä matematiikka YO-koe 19.3.2014
Ratkaisut (V. A.)

1. a)

$$7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1)$$
$$7x-21+1=x^2-1-x^2+1$$
$$7x=20$$
$$\underline{\underline{x=\frac{20}{7}}}$$

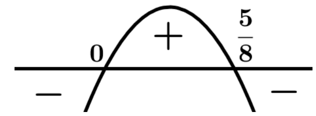
b)

$$x(5-8x)>0$$
$$-8x^2+5x>0$$

Nollakohdat:

$$-8x^2+5x=0$$
$$-x(8x-5)=0$$
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x=\frac{5}{8}$$

Vastaus: $\underline{\underline{0<x<\frac{5}{8}}}$



c)

$$^{a+b)}\frac{a^2-b^2}{a-b}+\;^{a-b)}\frac{a^2-b^2}{a+b}, \quad a\neq \pm b$$
$$=\frac{(a+b)(a^2-b^2)+(a-b)(a^2-b^2)}{(a-b)(a+b)}$$
$$=\frac{\cancel{(a^2-b^2)}\,(a+b+a-b)}{\cancel{a^2-b^2}}$$
$$=\underline{\underline{2a}}$$

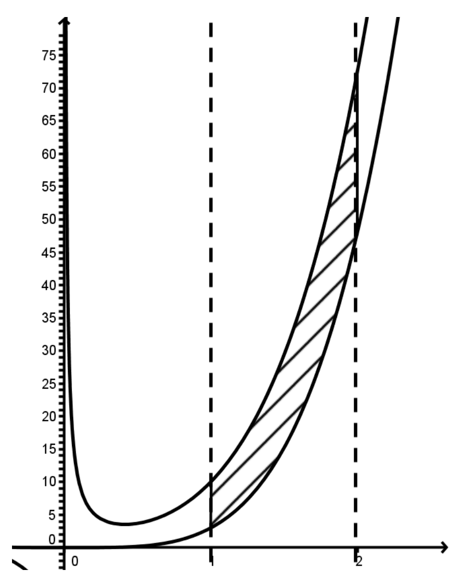
2.

Funktio	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
Derivaatan kuvaajan numero	**4**	**1**	**3**

3. a) $f(x)=6x^2+3x^4+\frac{1}{x}, \; g(x)=3x^4, \; x=1, \; x=2.$

Alueessa $f(x)>g(x)$.

$$\text{A}=\int_1^2 (f(x)-g(x))\,dx=\int_1^2 (6x^2+3x^4+\frac{1}{x}-3x^4)\,dx$$
$$=\int_1^2 (6x^2+\frac{1}{x})\,dx$$
$$=\Big/_1^2\, 2x^3+\ln|x|$$
$$=2\cdot 2^3+\ln 2-(2\cdot 1^3+\ln 1)$$
$$=16+\ln 2-2-0$$
$$=14+\ln 2$$
$$=14{,}693147\ldots\approx \underline{\underline{14{,}69}}$$



b) $f(x) = x^3 - 3x$ ja $g(x) = \frac{1}{2} f(2x),\ x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$g'(x) = \frac{1}{2} f'(2x) \cdot D(2x) = \frac{1}{2}(3(2x)^2 - 3) \cdot 2 = 12x^2 - 3$$
$$g'(1) = 12 \cdot 1^2 - 3 = \underline{\underline{9}}$$

4. $ax^2 - 5x + 2 = 0$.

Jos $a = 0$:

$$0x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$-5x + 2 = 0$$
$x = \frac{2}{5}$ eli yhtälöllä 1 juuri.

Jos $a \neq 0$:

Yhtälöllä 1 juuri, jos diskriminantti = 0.
$$(-5)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 0$$
$$8a = 25$$
$$a = \frac{25}{8}$$

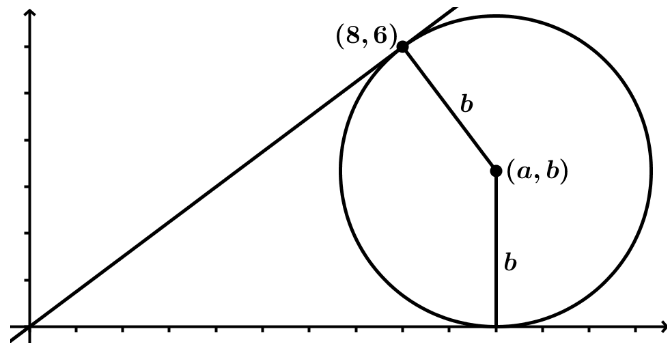
Vastaus: Yhtälöllä täsmälleen yksi juuri, kun $\underline{\underline{a = 0 \text{ tai } a = \frac{25}{8}}}$.

5. Olkoon ympyrän keskipiste = $(a,\, b)$. Koska ympyrä sivuaa x-akselia, on ympyrän säde = b (ks. kuva!).

$$3x - 4y = 0$$
$$4y = 3x$$
$$y = \frac{3}{4}x \;\Rightarrow\; \text{Tangentin kulmakerroin } k_t = \frac{3}{4}.$$

Pisteeseen $(8,\,6)$ piirretyn säteen kulmakerroin k_s :

$$k_t \cdot k_s = -1 \quad \Rightarrow k_s = -\frac{4}{3}.$$



Toisaalta

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-b}{8-a} = -\frac{4}{3}$$
$$18 - 3b = -32 + 4a$$
$$4a + 3b = 50$$

Säteen pituudesta seuraa

$$b = \sqrt{(8-a)^2 + (6-b)^2} \;\|\, ()^2 \quad (\text{mol.puol.} > 0)$$
$$b^2 = (8-a)^2 + (6-b)^2$$
$$b^2 = 64 - 16a + a^2 + 36 - 12b + b^2$$
$$a^2 - 16a - 12b + 100 = 0$$

Saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} a^2 - 16a - 12b = -100 \\ \qquad\quad 4a + 3b = 50 \,\|\cdot 4 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad a^2 = 100 \qquad}$$

$$\underbrace{(a = -10)}_{\text{Sivuaa posit. } x\text{-akselia}} \quad \text{tai } a = 10 \quad \Rightarrow \quad 4a + 3b = 50$$

$$3b = 10$$
$$b = \frac{10}{3}$$

Vastaus: Ympyrän keskipiste on $\left(10,\, \frac{10}{3}\right)$ ja säde $\frac{10}{3}$.

6. Merkitään summaa $f(x)$.

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2 = x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + \cdots + x^2 - 2xa_n + a_n^2$$
$$= n \cdot x^2 - 2x(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$f'(x) = 0$$
$$2nx - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$
$$x = \frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{2n}$$
$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Koska $2n$ on positiivinen, on derivaatan kuvaaja nouseva suora.

$f(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Kulkukaavion perusteella summan $f(x)$ pienin arvo saadaan derivaatan nollakohdassa eli kun

$$x = \underline{\underline{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}}.$$

7. a) Taulukoidaan pistesummat:
(Lähde: YTL, Hyvän vastauksen piirteitä)

6	7	8	9	10
5	6	7	8	9
4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	**2**	**3**	**4**

Pistesummien todennäköisyydet:

$$\mathrm{P}(2,10) = \frac{1}{\underline{\underline{24}}} \qquad \mathrm{P}(3,9) = \frac{2}{24} = \frac{1}{\underline{\underline{12}}} \qquad \mathrm{P}(4,8) = \frac{3}{24} = \frac{1}{\underline{\underline{8}}} \qquad \mathrm{P}(5,6,7) = \frac{4}{24} = \frac{1}{\underline{\underline{6}}}$$

b) Odotusarvo

$$\mathrm{E}(x) = \sum x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 10 \cdot \frac{1}{24} = \underline{\underline{6}}$$

8. Säteet leikkaavat, jos vektoriyhtälöllä on ratkaisu:

$$\overline{OA}+s\overline{u}=\overline{OB}+t\overline{v}$$
$$\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}+s(2\overline{i}-\overline{j}-3\overline{k})=9\overline{i}-\overline{j}-12\overline{k}+t(-\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k})$$
$$\begin{cases}1+2s=9-t\\ -2-s=-1-2t\\ 3-3s=-12+3t\end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu (esim. laskimella) on $t = 2$ ja $s = 3$, joten säteet leikkaavat toisensa.

Leikkauspiste on $(1+2s,\ -2-s,\ 3-3s)=\underline{\underline{(7,\ -5,\ -6)}}$.

9. a) Taso $x+2y+3z=6$.

x-akselin leikkauspiste A ($y = 0$ ja $z = 0$): $x+2\cdot 0+3\cdot 0=6 \quad\Rightarrow x=6 \quad\Rightarrow \mathrm{A}=(6,0,0)$.
y-akselin leikkauspiste B ($x = 0$ ja $z = 0$): $0+2\cdot y+3\cdot 0=6 \quad\Rightarrow y=3 \quad\Rightarrow \mathrm{B}=(0,3,0)$.
z-akselin leikkauspiste C ($x = 0$ ja $y = 0$): $0+2\cdot 0+3\cdot z=6 \quad\Rightarrow z=2 \quad\Rightarrow \mathrm{C}=(0,0,2)$.

Tetraedrin origosta lähtevät särmävektorit ovat
$\overline{a}=\overline{\mathrm{OA}}=6\overline{i}$, $\overline{b}=\overline{\mathrm{OB}}=3\overline{j}$, $\overline{c}=\overline{\mathrm{OC}}=2\overline{k}$.

Lasketaan tetraedrin tilavuus skalaarikolmitulolla:

$$\mathrm{V}=\frac{1}{6}\overline{abc}=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left(6\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{6}\cdot 6(3\cdot 2-0\cdot 0)=\underline{\underline{6}}.$$

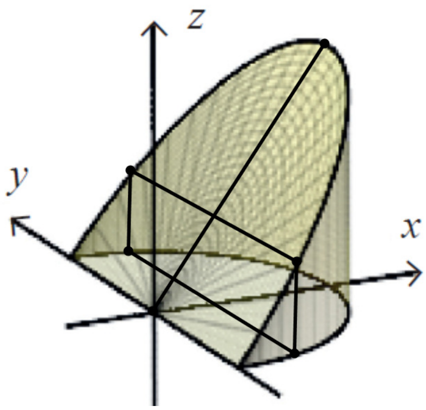
b) Olkoon kolmion ABC kaksi sivuvektoria
$$\overline{\mathrm{AB}}=(0-6)\overline{i}+(3-0)\overline{j}+(0-0)\overline{k}=-6\overline{i}+3\overline{j}$$
$$\overline{\mathrm{AC}}=(0-6)\overline{i}+(0-0)\overline{j}+(2-0)\overline{k}=-6\overline{i}+2\overline{k}$$

Lasketaan kolmion ABC pinta-ala ristitulon avulla:

$$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -6 & 3 & 0\\ -6 & 0 & 2\end{vmatrix}=(3\cdot 2-0\cdot 0)\overline{i}-(-6\cdot 2-(-6)\cdot 0)\,\overline{j}+(-6\cdot 0-(-6)\cdot 3)\,\overline{k}=6\overline{i}+12\overline{j}+18\overline{k}$$

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}|\,\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\,|=\frac{1}{2}|\,6\overline{i}+12\overline{j}+18\overline{k}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+12^2+18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{504}=\frac{1}{2}\sqrt{36\cdot 14}=\underline{\underline{3\sqrt{14}}}$$

10. Lasketaan tilavuus integroimalla kuvan mukaiset suorakulmiot välillä [0, r].



Pohjaympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$.

Kohdassa x olevan suorakulmion kanta on $2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.
Suorakulmion korkeus kohdassa x saadaan suoralta, joka kulkee pisteiden (**0**,0,**0**) ja ($\boldsymbol{r}$, 0, $\boldsymbol{h}$) kautta:

$$z - z_0 = k(x - x_0)$$
$$z - 0 = \frac{h-0}{r-0}(x-0)$$
$$z = \frac{h}{r}x$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} = \int_0^r (2y \cdot z)dx &= \int_0^r (2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{h}{r}x)dx \\
&= -\frac{h}{r}\int_0^r -2x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \\
&= -\frac{h}{r}\Big/_0^r \frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{h}{r} \cdot \frac{2}{3}(0 - (r^2)^{\frac{3}{2}}) \\
&= -\frac{h}{r} \cdot \frac{2}{3}(-r^3) \\
&= \underline{\underline{\frac{2}{3}hr^2}}
\end{aligned}$$

11. a)

$$f'(x)=\begin{cases} x\,, & \text{kun } 0\le x<1 \\ 1\,, & \text{kun } 1\le x<2 \\ -x+3\,, & \text{kun } 2\le x\le 4 \end{cases}$$

b)

$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 +C, & \text{kun } 0\le x<1 \\ x+D\,, & \text{kun } 1\le x<2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3x+E\,, & \text{kun } 2\le x\le 4, \quad C,D,E\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(0)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\cdot 0^2 +C=0 \;\Leftrightarrow\; C=0.$$

Koska integraalifunktiot ovat derivoituvia, ovat ne jatkuvia:

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot 1^2+0=1+D \quad\Leftrightarrow\quad D=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \quad\Leftrightarrow\quad 2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2+E= \quad\Leftrightarrow\quad E=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2\,, & \text{kun } 0\le x<1 \\ x-\frac{1}{2}\,, & \text{kun } 1\le x<2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}\,, & \text{kun } 2\le x\le 4 \end{cases}}}$$

c) Suljetulla välillä jatkuva funktio $f(x)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa:

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0^2=0 \quad \text{pienin}$$
$$f(4)=-\frac{1}{2}\cdot 4^2+3\cdot 4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$$
$$f(3)=-\frac{1}{2}\cdot 3^2+3\cdot 3-\frac{5}{2}=2 \quad \text{suurin}$$

Vastaus: Funktion $f(x)$ pienin arvo on 0 ja suurin arvo on 2.

12. (Lähde: YTL, Hyvän vastauksen piirteitä)

Derivaatan likiarvo grafiikkalaskimella TI-86:

p	**lauseke**	**virheen itseisarvo**
3	0,87734270288	$2{,}4\cdot10^{-4}$
4	0,8775585892	$2{,}4\cdot10^{-5}$
5	0,877580165	$2{,}4\cdot10^{-6}$
6	0,87758232	$2{,}4\cdot10^{-7}$
7	**0,8775826**	$3{,}8\cdot10^{-8}$
8	0,877583	$4{,}4\cdot10^{-7}$
9	0,87759	$7{,}4\cdot10^{-6}$
10	0,8776	$1{,}7\cdot10^{-5}$
$\cos(0{,}5)$	0,87758256189	

Arvo $p = 7$ antaa parhaan likiarvon.

13. a)

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)=1007$$

$$(k+1)\cdot n+(1+2+3+\cdots+k)=1007$$

$$(k+1)\cdot n+k\frac{1+k}{2}=1007 \parallel\cdot 2$$

$$2(k+1)\cdot n+k(1+k)=2014$$

$$(k+1)(2n+k)=2014 \quad\Rightarrow\quad \text{luvut } n \text{ ja } k \text{ toteuttavat yhtälön!}$$

b) Luvun 2014 alkutekijöihinjako:

$$\begin{aligned}2014 &= 2\cdot1007\\ &= \underline{\underline{2\cdot19\cdot53}}\end{aligned}$$

c) Kohdan b) perusteella:

$$(k+1)(2n+k)=2014$$
$$(k+1)(2n+k)=2\cdot 19\cdot 53.$$

Luetellaan kaikki mahdolliset yhdistelmät, ratkaisut alleviivattu:

1. $\begin{cases} k+1=1 \\ 2n+k=2\cdot 19\cdot 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0\notin \mathbb{Z}_+ \\ n=1007 \end{cases}$

2. $\begin{cases} k+1=2 \\ 2n+k=19\cdot 53 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases} k=1 \\ n=503 \end{cases}}}$

3. $\begin{cases} k+1=19 \\ 2n+k=2\cdot 53 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases} k=18 \\ n=44 \end{cases}}}$

4. $\begin{cases} k+1=53 \\ 2n+k=2\cdot 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=52 \\ n=-7\notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}$

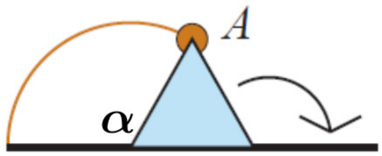
5. $\begin{cases} k+1=2\cdot 19 \\ 2n+k=53 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases} k=37 \\ n=8 \end{cases}}}$

6. $\begin{cases} k+1=2\cdot 53 \\ 2n+k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=105 \\ n=-43\notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}$

7. $\begin{cases} k+1=19\cdot 53 \\ 2n+k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1006 \\ n=-502\notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}$

8. $\begin{cases} k+1=2\cdot 19\cdot 53 \\ 2n+k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2013 \\ n=-1006\notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}$

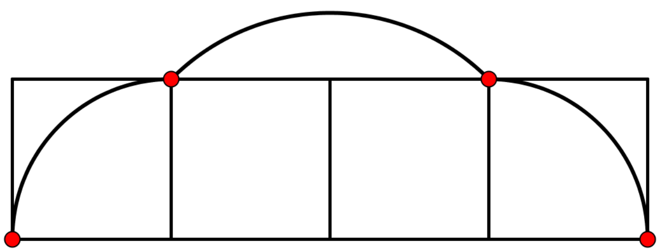
14. **(*) a)** Käyrä on kaksi kertaa kulmaa α vastaava sektorin kaaren pituus.



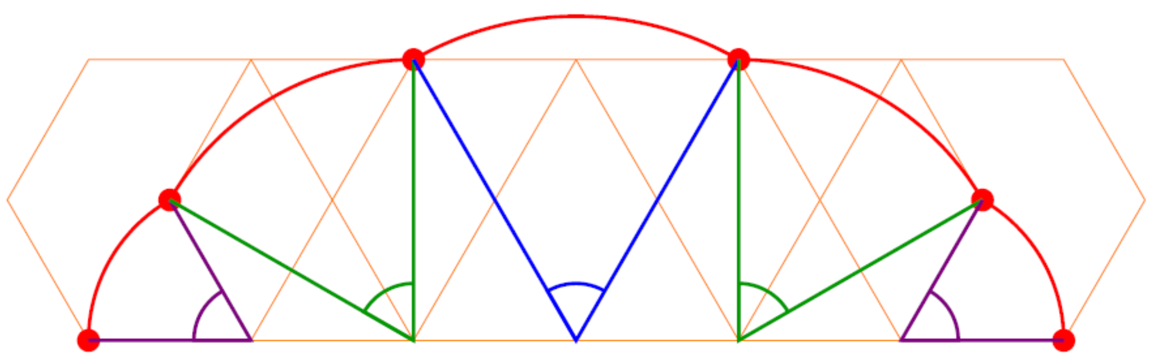
Kolmio on tasasivuinen, joten kaikki kulmat ovat 60°. Vieruskulmana $\alpha = 120^\circ$.

Kaaren pituus on $2 \cdot \frac{120}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{p}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{9}}}\, p$.

b) Neliö:



Kuusikulmio (Kuvan lähde MAOL):



c) Neliön muodostaman käyrän pituus on

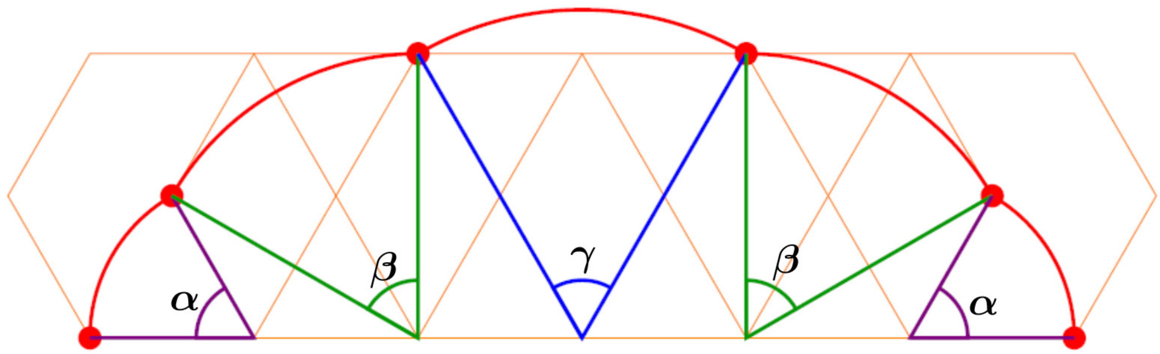
$$\frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{p}{4}\right) + \frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{p}{4}\right) + \frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{p}{4}\right) = \pi \cdot \left(\frac{p}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \cdot \left(\frac{p}{4}\right)$$

$$= \left(\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)\left(\frac{p}{4}\right)$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{p}{4}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2+\sqrt{2}}{8}\pi p}}$$

d)

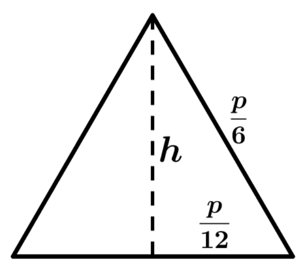


Yhden tasasivuisen pikkukolmion korkeus h:

$$h^2+\left(\frac{p}{12}\right)^2=\left(\frac{p}{6}\right)^2$$

$$h=\sqrt{\left(\frac{p}{6}\right)^2-\left(\frac{p}{12}\right)^2}$$

$$h=\sqrt{\frac{1}{48}}p$$



Kuusikulmion muodostaman käyrän pituus:

$$2\cdot\frac{60}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{p}{6}\right) \;+\; 2\cdot\frac{60}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{48}}p\right) \;+\; \frac{60}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(2\cdot\frac{p}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\pi p \;+\; \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{48}}\pi p \;+\; \frac{1}{9}\pi p$$

$$=\frac{2}{9}\pi p \;+\; \sqrt{\frac{16}{432}}\pi p$$

$$=\frac{2}{9}\pi p \;+^{\sqrt{3})}\; \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi p$$

$$=\underline{\underline{\frac{2+\sqrt{3}}{9}\pi p}}$$

15. **(*)** Funktiot f ja g ovat ortogonaaliset, jos $f * g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0.$

a)

$$g_1(x) = f_1(x) - \frac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0} g_0(x) = x - \frac{\int_{-1}^{1}(1\cdot x)dx}{\int_{-1}^{1}(1\cdot 1)dx}\cdot 1$$

$$= x - \frac{\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2}{1-(-1)}$$

$$= x - 0$$

$$= \underline{\underline{x}}$$

$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0(x) - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1(x) = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1}(1\cdot x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1\cdot 1)dx}\cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1}(x\cdot x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(x\cdot x)dx}\cdot x$$

$$= x^2 - \frac{\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3}{1-(-1)} - \frac{\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{4}\cdot(-1)^4}{\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3}\cdot x$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - 0x$$

$$= \underline{\underline{x^2 - \frac{1}{3}}}$$

b)

$$g_0 * g_1 = \int_{-1}^{1}(1\cdot x)dx = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = 0.$$

$$g_0 * g_2 = \int_{-1}^{1}(1\cdot(x^2 - \frac{1}{3}))dx = \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{3}(-1)\right) = 0 - 0 = 0.$$

$$g_1 * g_2 = \int_{-1}^{1} x(x^2 - \frac{1}{3})dx = \int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{1}{3}x)dx = \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{6}\cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{6}\cdot(-1)^2\right) = 0.$$

Näin ollen ortogonaalisuus on voimassa eri indekseillä.

c) $h(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

$$h*g_0=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)\cdot 1\,dx=\Big/_{-1}^{1}\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx=\frac{2}{3}a+2c$$

$$h*g_1=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)\cdot x\,dx=\Big/_{-1}^{1}\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$$

$$\begin{aligned}h*g_2=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)\cdot(x^2-\frac{1}{3})\,dx&=\int_{-1}^{1}(x^5+ax^4+bx^3+cx^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}ax^2-\frac{1}{3}bx-\frac{1}{3}c)\,dx\\&=\Big/_{-1}^{1}\left(\frac{1}{6}x^6+\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{4}x^5+\frac{c}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{9}ax^3-\frac{1}{6}bx^2-\frac{1}{3}cx\right)\\&=-\frac{11}{90}a\end{aligned}$$

Jotta kaikki vaihtoehdot olisivat ortogonaaliset, on oltava:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}a+2c=0\\ \frac{2}{5}+\frac{2}{3}b=0 \quad\Leftrightarrow\quad b=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}\\ -\frac{11}{90}a=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=0\end{cases}$$

$$\frac{2}{3}a+2c=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2c=0 \quad\Leftrightarrow\quad c=0.$$

Vastaus: $a=0$, $b=-\frac{3}{5}$ ja $c=0$.