YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

23.3.2016

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan omalle puoliarkille. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa **Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.**

5. Eurooppalaisessa ruletissa kierroksen tulos on yksi luvuista $0, 1, 2, 3, \ldots, 35, 36$, jotka kaikki ovat yhtä todennäköisiä. Luku 0 on musta, ja muista luvuista puolet on punaisia ja puolet valkoisia. Laske seuraavien pelitapojen voittojen odotusarvot, kun panoksena on 1 euro.

a) Pelaaja valitsee yhden luvuista $0, 1, 2, 3, \ldots, 35, 36$. Jos kierroksen tulos on tämä luku, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 35 euroa. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

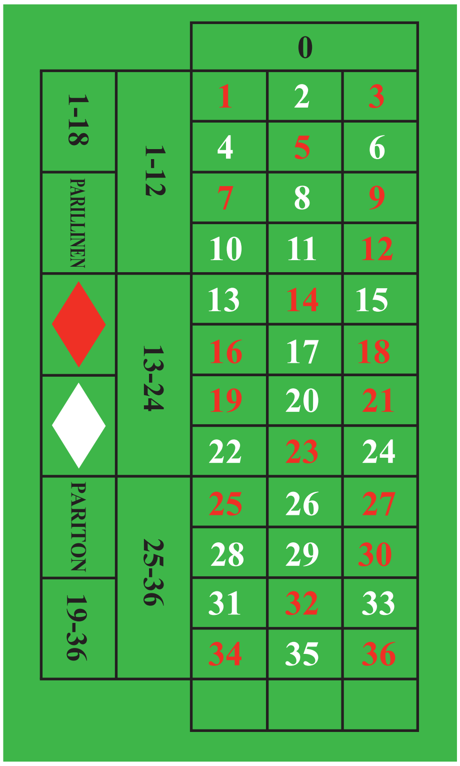
b) Pelaaja valitsee vaakarivin

7	8	9

.

Jos kierroksen tulos on jokin näistä luvuista, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 11 euroa. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

c) Pelaaja valitsee valkoisen värin. Jos kierroksen tulos on jokin valkoinen luku, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 1 euron. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.



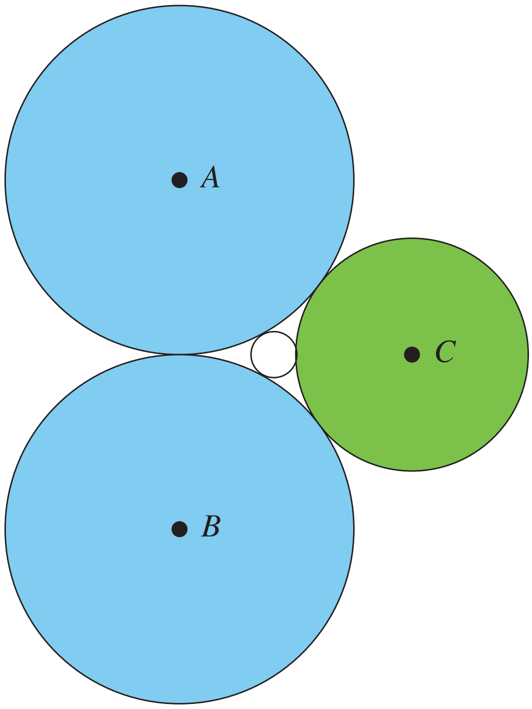
<fi.wikipedia.org>. Luettu 25.3.2015.

6. Maapallon säde on 6 371 km, ja sen pohjoisen napapiirin leveysaste on 66,5. Pohjoiselta napapiiriltä valitaan pisteet A ja B, joiden pituusasteiden erotus on 90 astetta.

a) Määritä pisteiden A ja B välisen viivasuoran tunnelin pituus.

b) Määritä pisteiden A ja B välisen lyhyemmän napapiirin kaaren pituus.

7. Kolme ympyrää sivuaa toisiaan oheisen kuvion mukaisesti. Ympyröiden keskipisteet ovat A, B ja C ja niiden säteet samassa järjestyksessä 3, 3 ja 2. Kuinka suuri ympyrä mahtuu näiden kolmen ympyrän väliin jäävään alueeseen? Anna vastauksena tämän ympyrän säteen tarkka arvo.



8. **a)** Muodosta sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(2, 4, 6)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x + 2y = 3$.

b) Missä pisteissä a-kohdan taso leikkaa koordinaattiakselit?

9. Valitse joko tehtävä 9.1. tai tehtävä 9.2.

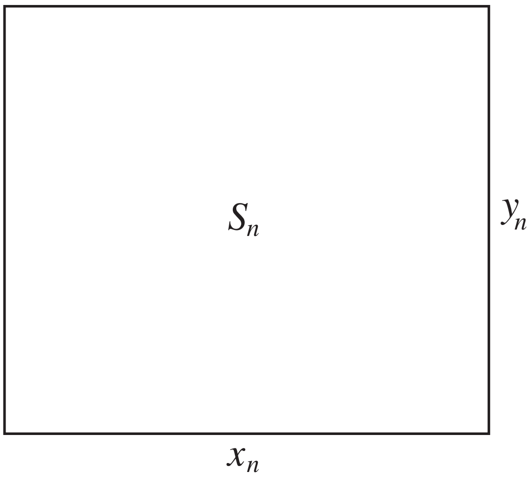
9.1. Luvun $\sqrt{20}$ likiarvoja voidaan laskea tarkastelemalla jonoa suorakulmioita, joiden pinta-ala on 20. Aloitetaan suorakulmiosta S_1, jonka sivujen pituudet ovat

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad y_1 = \frac{20}{x_1}.$$

Seuraavan suorakulmion S_2 yhden sivun pituus x_2 saadaan laskemalla lukujen x_1 ja y_1 keskiarvo, jolloin toisen sivun pituus on

$$y_2 = \frac{20}{x_2}.$$

Tiedetään, että jatkamalla tällä tavalla saadaan jono suorakulmioita $S_1, S_2, S_3, \ldots,$ joiden muoto lähestyy neliötä. Tämän neliön sivun pituus on silloin $\sqrt{20}$. Määritä approksimaation x_5 suhteellinen virhe oikeaan 8-desimaaliseen likiarvoon $\sqrt{20} \approx 4{,}47213596$ verrattuna. Anna vastaus prosenttiyksikön kymmenesosan tarkkuudella.



9.2. Funktion $g(x)$ arvoille on voimassa $-20 \leq g(x) \leq 16$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Lauseke 2016^{2016} esitetään kymmenjärjestelmän lukuna.

a) Mikä on luvun viimeinen numero?

b) Mitkä ovat luvun kaksi ensimmäistä numeroa?

c) Kuinka monta numeroa luvussa on?

11. Tehtaassa valmistetaan tölkitettyjä säilykehedelmiä. Päärynänpuolikkaita pakataan suoran ympyrälieriön muotoiseen peltitölkkiin. Tölkin pohja- ja kansilevyjen materiaalin hinta on 2,00 €/m^2 ja vaipan materiaalin hinta 1,00 €/m^2. Suunnittele materiaalikustannuksiltaan mahdollisimman halpa peltitölkki, jonka tilavuus on 1 000 cm^3. Anna vastauksena tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhteen tarkka arvo.

12. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \int_0^x |\sin t\,|\,dt,$$

kun $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) Perustele geometrisesti kaava $f(2\pi) = 2f(\pi)$.

b) Laske $f(x)$, kun $0 \leq x \leq 2\pi$.

13. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tetraedrin kolme kärkeä ovat koordinaattiakseleiden pisteissä $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ja $(0, 0, c)$, ja neljäs kärki on origossa $(0, 0, 0)$. Kärkien vastaisten tetraedrin tahkojen pinta-aloja merkitään samassa järjestyksessä kirjaimilla A, B, C ja D, jossa D tarkoittaa origon vastaisen tahkon pinta-alaa. Osoita, että

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2.$$