Lääkiskurssi

- 5-8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa **1.9., 2.11., 11.1., 22.2.** tai **4.4.** Opetusajaksi voi yleensä valita joko 9.30-12.30 tai 13-16 tai 17-20.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta ja pitkällä kurssilla lisäksi 6 yo-koetta
- Pitkä kurssi **22.2.-27.5.** ja kevätkurssi **5.4.-27.5.**

Pitkä matematiikka, kevät 2016

Mallivastaukset, 23.3.2016

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään he opettavat MAFY:n kursseilla ympäri vuoden ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Olli Hirviniemi, Sakke Suomalainen, Viljami Suominen ja Matti Virolainen. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. Täydennä oikeiden vaihtoehtojen numerot alempaan taulukkoon.

		1	2	3
A	Lausekkeen $1{,}1^3$ arvo on	1,13	3,3	1,331
B	Tilavuus $0{,}5\,\mathrm{m}^3$ on sama kuin	50 l	500 l	5 000 l
C	Luvuista $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ ja $\frac{16}{21}$ suurin on	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Luvun $-a+b$ vastaluku on	$b-a$	$a-b$	$-a-b$
E	Yhtälön $x^2-3x+1=0$ juurten summa on	3	4	5
F	Tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %, joten lopullinen hinta on … alkuperäisestä hinnasta	99 %	100 %	101 %

Ratkaisu.

Kohta	A	B	C	D	E	F
Vaihtoehdon numero	3	2	2	2	1	1

1p / oikea kohta 6p

Perustelut ja selitykset: (ei vaadita koevastauksessa)

A)

$$\begin{aligned}1{,}1^2 &= 1{,}1\cdot 1{,}1\\ &= 1\cdot 1{,}1 + 0{,}1\cdot 1{,}1\\ &= 1{,}1+0{,}11\\ &= 1{,}21\\ 1{,}1^3 &= 1{,}1\cdot 1{,}1\cdot 1{,}1\\ &= 1{,}1\cdot 1{,}21\\ &= 1\cdot 1{,}21 + 0{,}1\cdot 1{,}21\\ &= 1{,}21+0{,}121 = 1{,}331.\end{aligned}$$

B)

$$0{,}5\,\mathrm{m}^3 = 0{,}5\cdot 1000\,\mathrm{dm}^3 = 500\,\mathrm{dm}^3 = 500\,\mathrm{l}.$$

C) Lavennetaan luvut samannimisiksi:

$$\begin{aligned}{}^{7)}\frac{2}{3} &= \frac{14}{21}\\ {}^{3)}\frac{6}{7} &= \frac{18}{21}\end{aligned}$$

Nyt nähdään, että

$$\frac{14}{21} < \frac{16}{21} < \frac{18}{21},$$

joten suurin luvuista on $\frac{6}{7}$.

D)

$$-(-a+b) = a-b.$$

E) Ratkaistaan yhtälön juuret.

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x + 1 &= 0 \\
x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\
x &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Juurien summa on siis

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\cancel{\sqrt{5}}+3-\cancel{\sqrt{5}}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

F) Merkitään alkuperäistä hintaa a:lla.

$$\begin{aligned}
10\% \text{ korotus:} \quad & 1{,}1a \\
10\% \text{ lasku:} \quad & 0{,}9 \cdot 1{,}1a \\
& = (0{,}9 \cdot 1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1)a \\
& = (0{,}9 + 0{,}09)a \\
& = 0{,}99a,
\end{aligned}$$

joten uusi hinta on 99% alkuperäisestä.

2. a) Sievennä lauseke $x - (2x^2 - (3x - 4x^2))$.
b) Osoita, että luvut
$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{\sqrt{6}}{2}$$
ovat toistensa käänteislukuja.
c) Osoita, että $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, kun $a > 0$ ja $b > 0$.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} x - (2x^2 - (3x - 4x^2)) &= x - (2x^2 - 3x + 4x^2) \\ &= x - 2x^2 + 3x - 4x^2 && \text{1p} \\ &= \underline{\underline{-6x^2 + 4x}} && \text{1p(2p)} \end{aligned}$$

b) Käänteislukujen tulo on 1.

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} && \text{1p(3p)} \\ &= \frac{6}{6} = 1. \end{aligned}$$

Luvut $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ja $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ovat toistensa käänteislukuja. 1p(4p)

c) Oletus: $a > 0$ ja $b > 0$.
Väite: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Todistus:

$$\begin{aligned} a + b &< a + b + 2\sqrt{ab}, \quad \text{kun } a > 0 \text{ ja } b > 0 && \text{1p(5p)} \\ a + b &< (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \\ a + b &< (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ \sqrt{a+b} &< \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \text{kun } a > 0 \text{ ja } b > 0 \quad \square && \text{1p(6p)} \end{aligned}$$

3. a) Laske vektoreiden $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -\bar{i} - 7\bar{j}$ pituudet ja pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$.
b) Laske integraali
$$\int_0^9 (3 + \sqrt{x})\, dx.$$

Ratkaisu.

a)

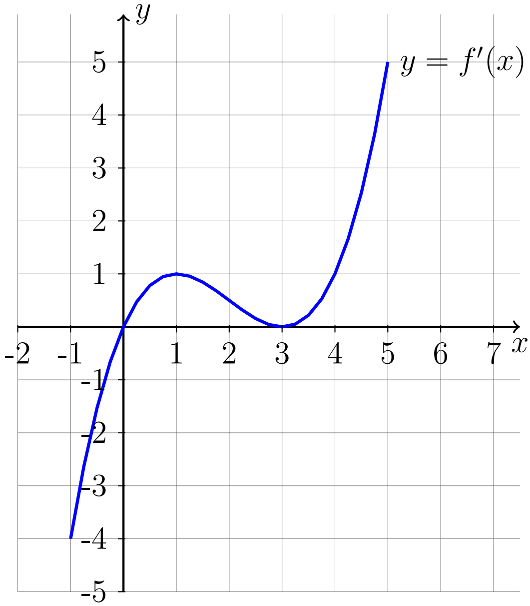
$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}} \quad \text{1p}$$
$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}} \quad \text{1p(2p)}$$
$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-7)\\ &= -2 + 21\\ &= \underline{\underline{19}} \quad \text{1p(3p)}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^9 (3 + \sqrt{x})\, dx &= \Big/_{\!0}^{9}\, 3x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad \text{1p(4p)}\\ &= \Big/_{\!0}^{9}\, 3x + \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 \quad \text{1p(5p)}\\ &= 3 \cdot 9 + \frac{2}{3}(\sqrt{9})^3 - 0\\ &= 27 + \frac{2}{3} \cdot 27\\ &= \frac{5}{\cancel{3}_{1}} \cdot \cancel{27}^{9}\\ &= \underline{\underline{45}}. \quad \text{1p(6p)}\end{aligned}$$

4. Alla olevassa kuviossa on erään funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja välillä $-1 < x < 5$.

   a) Määritä kuvaajan perusteella derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat.
   b) Määritä kuvaajan perusteella ne välit, joilla funktio $f(x)$ on kasvava.
   c) Määritä kuvaajan perusteella funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit.



Ratkaisu.

a) Välillä $-1 < x < 5$ on $f'(x) = 0$, kun

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \text{tai}$$ 1p

$$\underline{\underline{x = 3}}$$ 1p(2p)

b) $f(x)$ on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$ eli ainakin välillä $\underline{\underline{0 \leq x < 5}}$. 2p(4p)

c) Laaditaan f:n kulkukaavio

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
 & -1 \quad 0 & 0 \quad 3 & 3 \quad 5 \\
f'(x) & - & + & + \\
f(x) & \searrow & \nearrow & \nearrow
\end{array}$$ 1p(5p)

<u>Paikallinen minimi kohdassa $x = 0$.</u> 1p(6p)

5. Eurooppalaisessa ruletissa kierroksen tulos on yksi luvuista 0, 1, 2, 3, . . . , 35, 36, jotka kaikki ovat yhtä todennäköisiä. Luku 0 on musta, ja muista luvuista puolet on punaisia ja puolet valkoisia. Laske seuraavien pelitapojen voittojen odotusarvot, kun panoksena on 1 euro.

   a) Pelaaja valitsee yhden luvuista 0, 1, 2, 3, . . . , 35, 36. Jos kierroksen tulos on tämä luku, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 35 euroa. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

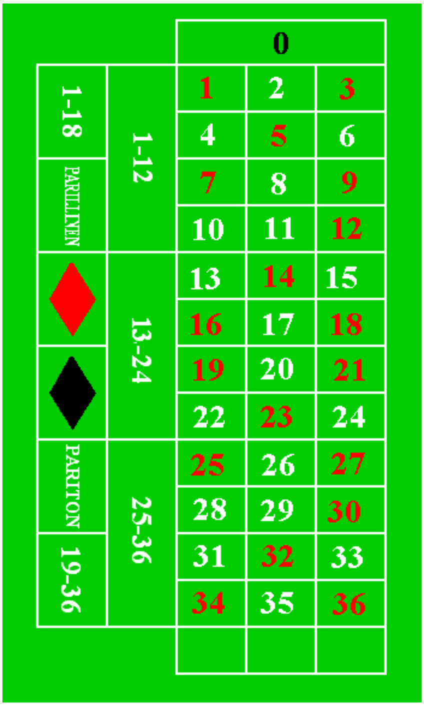
   b) Pelaaja valitsee vaakarivin

7	8	9

.

   Jos kierroksen tulos on jokin näistä luvuista, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 11 euroa. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

   c) Pelaaja valitsee valkoisen värin. Jos kierroksen tulos on jokin valkoinen luku, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 1 euron. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.



<fi.wikipedia.org>. Luettu 23.3.2016.

Ratkaisu. Lukujoukossa $0, 1, 2, 3, \ldots, 35, 36$ on 37 eri lukua, joista eri värejä on 1 musta, 18 punaista ja 18 valkoista.

a)

$$\begin{aligned} E(X) &= p_{\text{voitto}} X_{\text{voitto}} + p_{\text{ei voittoa}} X_{\text{ei voittoa}} \\ &= \frac{1}{37} \cdot 35\,€ + \frac{36}{37} \cdot (-1\,€) \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{37}\,€}} \end{aligned}$$

1p

1p(2p)

b)

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{3}{37} \cdot 11\,€ + \frac{34}{37} \cdot (-1\,€) \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{37}\,€}} \end{aligned}$$

1p(3p)

1p(4p)

c)

$$\begin{aligned} E(X) &= P(\text{"valkoinen"}) \cdot X_{\text{voitto}} + P(\text{"pun. tai musta"}) \cdot X_{\text{ei voittoa}} \\ &= \frac{18}{37} \cdot 1\,€ + \frac{18+1}{37} \cdot (-1\,€) \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{37}\,€}} \end{aligned}$$

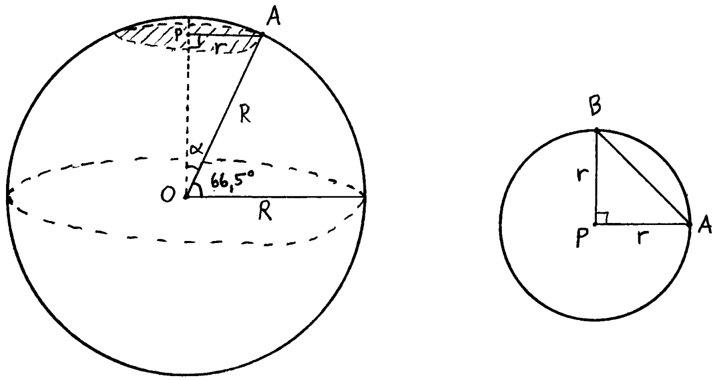
1p(5p)

1p(6p)

6. Maapallon säde on 6 371 km, ja sen pohjoisen napapiirin leveysaste on 66,5. Pohjoiselta napapiiriltä valitaan pisteet A ja B, joiden pituusasteiden erotus on 90 astetta.

   a) Määritä pisteiden A ja B välisen viivasuoran tunnelin pituus.
   b) Määritä pisteiden A ja B välisen lyhyemmän napapiirin kaaren pituus.

Ratkaisu.



$$R = 6371\,\text{km}$$
$$\alpha = 90° - 66{,}5° = 23{,}5°$$

Pohjoinen napapiiri muodostaa ympyrän P. Sen säteelle r pätee

$$\sin\alpha = \frac{r}{R}$$
$$r = R\sin\alpha \qquad (1)$$ 1p

a) Janan AB pituus saadaan tasakylkisestä ja suorakulmaisesta kolmiosta ABP.

$$|AB| = \sqrt{2}r$$

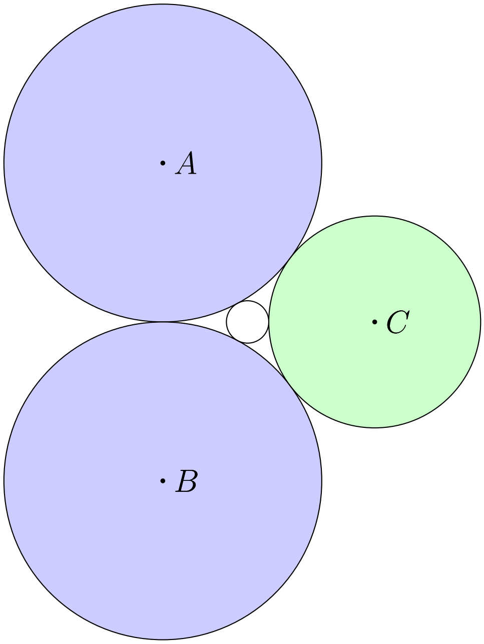
Sijoitetaan (1), saadaan

$$|AB| = \sqrt{2}R\sin\alpha$$ 1p(2p)
$$= \sqrt{2}\cdot 6371\,\text{km}\cdot\sin 23{,}5°$$
$$= 3592{,}711\ldots\,\text{km}$$
$$\approx \underline{\underline{3600\,\text{km}}}$$ 1p(3p)

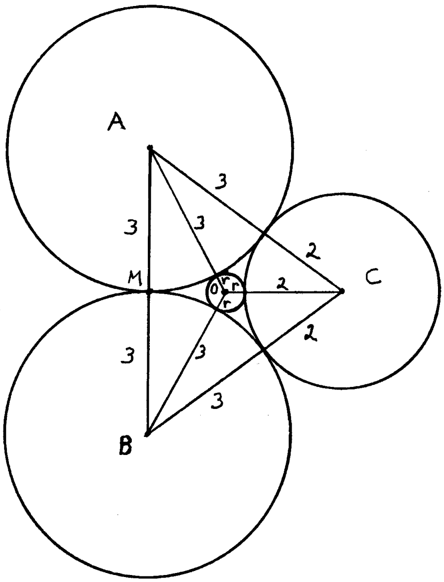
b) Kulmaa 90° vastaava kaarenpituus AB on

$$\begin{aligned}\frac{90°}{360°}\cdot 2\pi r &= \frac{1}{2}\pi\cdot R\cdot\sin\alpha && \text{1p(4p)}\\ &= \frac{1}{2}\pi\cdot 6371\,\text{km}\cdot\sin 23{,}5° && \text{1p(5p)}\\ &= 3990{,}498\ldots\ \text{km}\\ &= \underline{\underline{4000\,\text{km}}} && \text{1p(6p)}\end{aligned}$$

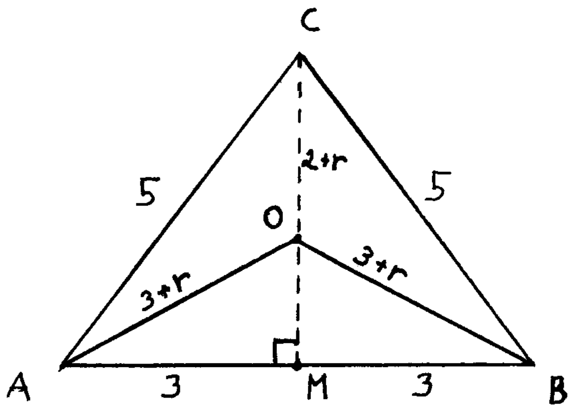
7. Kolme ympyrää sivuaa toisiaan oheisen kuvion mukaisesti. Ympyröiden keskipisteet ovat A, B ja C ja niiden säteet samassa järjestyksessä 3, 3 ja 2. Kuinka suuri ympyrä mahtuu näiden kolmen ympyrän väliin jäävään alueeseen? Anna vastauksena tämän ympyrän säteen tarkka arvo.



Ratkaisu.



Kuvassa kolmio ABC muodostuu ympyröille A, B ja C, niiden sivuamispisteiden kautta piirretyistä säteistä. Piste M on ympyröiden A ja B sivuamispiste, sekä janan AB keskipiste. Merkitään väliin jäävää ympyrääå O:lla ja sen sädettä r:llä. Muodostuu siis kaksi tasakylkistä kolmiota ABC ja ABO.



Korkeusjanan MC pituus on

$$|MC| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$ 1p

Joten korkeusjanan MO pituus on

$$|MO| = 4 - (2 + r) = 2 - r.$$ 2p(3p)

Nyt kolmiosta AMO saadaan Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} 3^2 + (2 - r)^2 &= (3 + r)^2 \\ \cancel{9} + 4 - 4r + \cancel{r^2} &= \cancel{9} + 6r + \cancel{r^2} \\ 10r &= 4 \\ r &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$ 2p(5p)

Vastaus: Ympyrän säde on $\frac{2}{5}$. 1p(6p)

8. a) Muodosta sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(2, 4, 6)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x + 2y = 3$.
b) Missä pisteissä a-kohdan taso leikkaa koordinaattiakselit?

Ratkaisu.

a)

TAPA I

Olkoon kysytyn tason yhtälö

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{1}$$

xy-tason pisteille pätee $z = 0$, joten xy-tasossa olevat tason (1) pisteet toteuttavat yhtälön $ax + by + d = 0$. Tehtävänannon mukaan leikkaussuora xy-tason kanssa on $x + 2y - 3 = 0$, joten yksi ratkaisu yhtälön (1) kertoimille on $a = 1$, $b = 2$ ja $d = -3$. 1p

Ratkaistaan c sijoittamalla tason yhtälöön (1) tunnetun pisteen koordinaatit (2,4,6).

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + c \cdot 6 - 3 &= 0 \\ 6c &= -7 \quad \| : 6 \\ c &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

1p(2p)

Tason yhtälö on

$$\begin{aligned} x + 2y - \frac{7}{6}z - 3 &= 0 \quad \| \cdot 6 \\ \underline{\underline{6x + 12y - 7z - 18 = 0}} \end{aligned}$$

1p(3p)

TAPA II

Tasoon kuuluu piste $C = (2, 4, 6)$ sekä xy-tason suoran $x+2y = 3$ pisteet. Valitaan em. suoralta pisteet $A = (3, 0, 0)$ ja $B = (1, 1, 0)$, jotka kuuluvat siis myös tarkasteltavaan tasoon. Piste P kuuluu tasoon, jos joillakin $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + t\overline{AB} + s\overline{AC} \\ &= 3\bar{i} + t(-2\bar{i} + \bar{j}) + s(-\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}) \\ &= (3 - 2t - s)\bar{i} + (t + 4s)\bar{j} + 6s\bar{k} \end{aligned} \tag{2}$$

1p

Kirjoitetaan yhtälöt koordinaateille x, y, z ja eliminoidaan s ja t.

$$\begin{cases} x = 3 - 2t - s & (3) \\ y = t + 4s & (4) \\ z = 6s & (5) \end{cases}$$

1p(2p)

Yhtälöstä (5) saadaan

$$s = \frac{z}{6}. \tag{6}$$

Sijoitetaan (6) yhtälöön (4), saadaan

$$\begin{aligned} y &= t + 4 \cdot \frac{z}{6} \\ t &= y - \frac{2}{3}z \qquad (7) \end{aligned}$$

Sijoitetaan (6) ja (7) yhtälöön (3), saadaan

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2\left(y - \frac{2}{3}z\right) - \frac{z}{6} \quad \| \cdot 6 \\ 6x &= 18 - 4(3y - 2z) - z \\ 6x &= 18 - 12y + 8z - z \\ 6x + 12y - 7z - 18 &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus: Tason yhtälö on $6x + 12y - 7z - 18 = 0$.

1p(3p)

b) Lasketaan leikkauspisteet.
x-akselilla $y = 0, z = 0$.

$$\begin{aligned} 6x - 18 &= 0 \\ 6x &= 18 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

1p(4p)

y-akselilla $x = 0, z = 0$.

$$\begin{aligned} 12y - 18 &= 0 \\ 12y &= 18 \\ y &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1p(5p)

z-akselilla $x = 0, y = 0$.

$$\begin{aligned} -7z - 18 &= 0 \\ -7z &= 18 \\ z &= -\frac{18}{7} \end{aligned}$$

Vastaus: Taso leikkaa koordinaattiakselit pisteissä $(3, 0, 0)$, $(0, \frac{3}{2}, 0)$ ja $(0, 0, -\frac{18}{7})$.

1p(6p)

Huom! Kohdassa a) vastaukseksi riittää myös tason vektorimuotoinen yhtälö (2) tai parametrimuotoinen yhtälö (3)-(5). b-kohdan ratkaisu parametrimuotoisen yhtälön avulla on kuitenkin hieman työläämpi kuin tässä esitetty tapa.

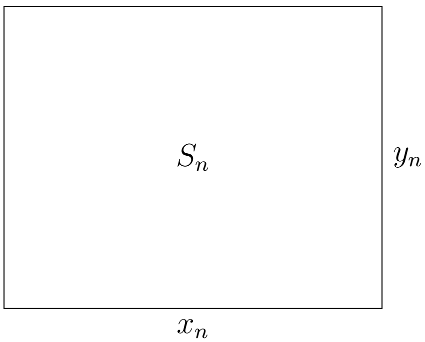
9.1. Luvun $\sqrt{20}$ likiarvoja voidaan laskea tarkastelemalla jonoa suorakulmioita, joiden pinta-ala on 20. Aloitetaan suorakulmiosta S_1, jonka sivujen pituudet ovat

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad y_1 = \frac{20}{x_1}.$$

Seuraavan suorakulmion S_2 yhden sivun pituus x_2 saadaan laskemalla lukujen x_1 ja y_1 keskiarvo, jolloin toisen sivun pituus on

$$y_2 = \frac{20}{x_2}.$$

Tiedetään, että jatkamalla tällä tavalla saadaan jono suorakulmioita S_1, S_2, S_3, ..., joiden muoto lähestyy neliötä. Tämän neliön sivun pituus on silloin $\sqrt{20}$. Määritä approksimaation x_5 suhteellinen virhe oikeaan 8-desimaaliseen likiarvoon $\sqrt{20} \approx 4{,}47213596$ verrattuna. Anna vastaus prosenttiyksikön kymmenesosan tarkkuudella.



Ratkaisu.

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = \frac{20}{x_1} = \frac{20}{1} = 20$$

1p

Lasketaan approksimaatio x_5.

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{x_1+y_1}{2} = \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2}\\
y_2 &= \frac{20}{x_2} = \frac{20}{\frac{21}{2}} = \frac{40}{21} && \text{1p(2p)}\\
x_3 &= \frac{x_2+y_2}{2} = \frac{\frac{21}{2}+\frac{40}{21}}{2} = \frac{521}{84}\\
y_3 &= \frac{20}{x_3} = \frac{20}{\frac{521}{84}} = \frac{1680}{521} && \text{1p(3p)}\\
x_4 &= \frac{x_3+y_3}{2} = \frac{\frac{521}{84}+\frac{1680}{521}}{2} = \frac{412561}{87528}\\
y_4 &= \frac{20}{x_4} = \frac{20}{\frac{412561}{87528}} = \frac{1750560}{412561} && \text{1p(4p)}\\
x_5 &= \frac{x_4+y_4}{2} = \frac{\frac{412561}{87528}+\frac{1750560}{412561}}{2} = \frac{323429594401}{72221278416} && \text{1p(5p)}
\end{aligned}
$$

Suhteellinen virhe on

$$\frac{|x_5 - 4{,}47213596|}{4{,}47213596} = 0{,}001381\ldots \approx \underline{\underline{0{,}1\%}} \qquad \text{1p(6p)}$$

9.2. Funktion $g(x)$ arvoille on voimassa $-20 \leq g(x) \leq 16$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu. Muodostetaan funktion $f(x) = x^2 g(x)$ erotusosamäärä kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{x^2 g(x) - 0^2 \cdot g(0)}{x} \\ &= \frac{x^2 g(x)}{x} \\ &= xg(x)\end{aligned}$$

2p

Tapa 1

Arvioidaan erotusosamäärää käyttäen tietoa $-20 \leq g(x) \leq 16$.

Kun $x > 0$

$$\begin{aligned}-20 \leq g(x) \leq 16 \quad &\| \cdot x \\ -20x \leq xg(x) \leq 16x\end{aligned}$$

1p(3p)

Koska $-20x \to 0$, kun $x \to 0$ ja $16x \to 0$, kun $x \to 0$, ja $xg(x)$ on niiden välissä, niin myös $xg(x) \to 0$, kun $x \to 0+$.

1p(4p)

Kun $x < 0$

$$\begin{aligned}-20 \leq g(x) \leq 16 \quad &\| \cdot x \\ -20x \geq xg(x) \geq 16x\end{aligned}$$

1p(5p)

Vastaavasti kuin edellä $xg(x) \to 0$, kun $x \to 0-$.

Koska erotusosamäärän vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 0$ ovat yhtä suuret, on $f(x)$ derivoituva kohdassa $x = 0$.

1p(6p)

Tapa 2

Arvioidaan erotusosamäärää käyttäen tietoa $-20 \leq g(x) \leq 16 < 20$, mistä ehdosta seuraa, että $|g(x)| \leq 20$.

1p(3p)

Edelleen

$$\begin{aligned}xg(x) &\leq |xg(x)| \\ &= |x||g(x)| \\ &\leq |x| \cdot 20 \to 0, \text{ kun } x \to 0.\end{aligned}$$

1p(4p)

Toisaalta

$$\begin{aligned} xg(x) &\geq -|xg(x)| \\ &= -|x||g(x)| \\ &\geq -|x| \cdot 20 \to 0, \text{ kun } x \to 0. \end{aligned}$$ 1p(5p)

Näin ollen $xg(x)$ lähestyy lukua 0, kun x lähestyy lukua 0. Siis

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

eli f on derivoituva kohdassa $x = 0$. 1p(6p)

10. Lauseke 2016^{2016} esitetään kymmenjärjestelmän lukuna.

a) Mikä on luvun viimeinen numero?
b) Mitkä ovat luvun kaksi ensimmäistä numeroa?
c) Kuinka monta numeroa luvussa on?

Ratkaisu.

a)

$\boxed{\text{Tapa I:}}$

Tarkastellaan lukua 2016^{2016} modulo 10. $2016 \equiv 6 \pmod{10}$, joten

$$2016^{2016} \equiv 6^{2016} \pmod{10}.$$

Koevastaukseen kuulumaton lisäselitys: Huomataan, että

$$6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 6 \pmod{10},$$

josta keksitään, että kaikilla kokonaisluvuilla n pätee

$$6^n \equiv 6 \pmod{10}.$$

Todistetaan induktiolla, että $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Alkuaskel $n = 1$:

$$6^1 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Induktio-oletus: Oletetaan, että $6^k \equiv 6 \pmod{10}$ positiivisella kokonaisluvulla k.

$$\begin{aligned} 6^{k+1} &\equiv 6 \cdot 6^k \pmod{10} \\ &\equiv 6 \cdot 6 \pmod{10} \\ &\equiv 36 \pmod{10} \\ &\equiv 6 \pmod{10} \end{aligned}$$

Induktio-oletuksesta seuraa siis, että $6^{k+1} \equiv 6 \pmod{10}$. Induktioperiaatteen nojalla nyt siis $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. 1p

Siten

$$2016^{2016} \equiv 6^{2016} \equiv 6 \pmod{10}.$$

Luvun viimeinen numero on jakojäännös, kun luku jaetaan 10:llä. Siten luvun 2016^{2016} viimeinen numero on 6. 1p(2p

Tapa II:

$$6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Tätä hyödyntämällä saadaan:

$$\begin{aligned}
6^{2016} &\equiv (6^2)^{1008} \equiv 6^{1008} \equiv (6^2)^{504} \equiv 6^{504} \\
&\equiv (6^2)^{252} \equiv 6^{252} \equiv (6^2)^{126} \equiv 6^{126} \\
&\equiv (6^2)^{63} \equiv 6^{63} \equiv 6 \cdot 6^{62} \equiv 6 \cdot 6^{31} \\
&\equiv 6^{32} \equiv (6^2)^{16} \equiv 6^{16} \equiv (6^2)^8 \\
&\equiv 6^8 \equiv (6^2)^4 \equiv 6^4 \equiv (6^2)^2 \\
&\equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Luvun viimeinen numero on jakojäännös, kun luku jaetaan 10:llä. Siten luvun 2016^{2016} viimeinen numero on 6. 2p

Tapa III:

$$\begin{aligned}
6^{2016} &\equiv 2^{2016} \cdot 3^{2016} \\
&\equiv 2^{2016} \cdot 3^{2 \cdot 1008} \\
&\equiv 2^{2016} \cdot 9^{1008} \quad \| \text{sij. } 9 \equiv -1 \pmod{10} \\
&\equiv 2^{2016} \cdot (-1)^{1008} \\
&\equiv 2^{2016}.
\end{aligned}$$

Luku 2^{2016} on riittävän pieni, että laskimesta saadaan kaikki sen numerot

$$7524 \ldots 5536$$

Luvun viimeinen numero on jakojäännös, kun luku jaetaan 10:llä, joten

$$2^{2016} \equiv 6 \pmod{10}.$$

Näin ollen edellä olevan laskun perusteella myös

$$6^{2016} \equiv 2^{2016} \equiv 6 \pmod{10},$$

joten samalla perusteella myös luvun 2016^{2016} viimeinen numero on 6. 2p

b) Otetaan luvusta 2016^{2016} kymmenkantainen logaritmi.

$$\lg\left(2016^{2016}\right) = 2016 \cdot \lg(2016) = 6661{,}8529\ldots$$

Tällöin

$$\begin{aligned} 2016^{2016} &= 10^{6661{,}8529\ldots} \\ &= 10^{6661+0{,}8529\ldots} \\ &= 10^{0{,}8529\ldots} \cdot 10^{6661} \\ &= 7{,}1269\ldots \cdot 10^{6661}, \end{aligned}$$

1p(3p)

eli kaksi ensimmäistä numeroa ovat 7 ja 1. 1p(4p)

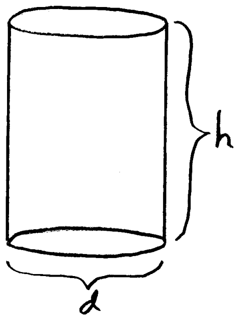
c) Edellisen kohdan perusteella

$$2016^{2016} = 7{,}1269\ldots \cdot 10^{6661},$$

joten luvussa 2016^{2016} on yhtä monta numeroa kuin luvussa 10^{6661}, eli 6662 numeroa. 2p(6p)

11. Tehtaassa valmistetaan tölkitettyjä säilykehedelmiä. Päärynänpuolikkaita pakataan suoran ympyrälieriön muotoiseen peltitölkkiin. Tölkin pohja- ja kansilevyjen materiaalin hinta on 2,00 €/m^2. Suunnittele materiaalikustannuksiltaan mahdollisimman halpa peltitölkki, jonka tilavuus on 1 000 cm^3. Anna vastauksena tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhteen tarkka arvo.

Ratkaisu. Olkoon tölkin pohjan halkaisija d ja tölkin korkeus h. Silloin tilavuudesta:



$$1000 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h$$
$$h = \frac{4000}{\pi d^2}$$ 1p

Vaipan pinta-ala neliösenttimetreinä on

$$\pi d h = \pi d \frac{4000}{\pi d^2} = \frac{4000}{d}$$

ja pohja- ja kansilevyjen yhteenlaskettu pinta-ala on vastaavasti

$$2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{2}.$$

Yhteenlaskettu hinta on silloin euroina

$$\frac{2}{10000} \cdot \frac{\pi d^2}{2} + \frac{1}{10000} \cdot \frac{4000}{d} = \frac{1}{10000} \cdot \left(\pi d^2 + \frac{4000}{d}\right).$$ 1p(2p)

Etsitään hinnalle pienintä arvoa derivoimalla.

$$f(d) = \frac{1}{10000} \cdot \left(\pi d^2 + \frac{4000}{d}\right), \quad d > 0$$
$$f'(d) = \frac{1}{10000} \cdot \left(2\pi d - \frac{4000}{d^2}\right)$$ 1p(3p)

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10000} \cdot \left(2\pi d - \frac{4000}{d^2}\right) &= 0 \quad \| \cdot 10000d^2 \\ 2\pi d^3 - 4000 &= 0 \\ 2\pi d^3 &= 4000 \quad \| : 2\pi \\ d^3 &= \frac{4000}{2\pi} \\ d &= \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} \end{aligned}$$ 1p(4p)

Muodostetaan kulkukaavio:

$$f'(1) = \frac{1}{10000} \cdot \left(2\pi \cdot 1 - \frac{4000}{1^2}\right) = \frac{1}{10000} \cdot (2\pi - 4000) < 0$$
$$f'(100) = \frac{1}{10000} \cdot \left(2\pi \cdot 100 - \frac{4000}{100^2}\right) = \frac{1}{10000}\left(200\pi - \frac{4}{10}\right) > 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} & 0 \quad & \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} \quad \\ f'(d) & - & + \\ f(d) & \searrow & \nearrow \end{array}$$

Pienin hinta saadaan siis halkaisijan ollessa $\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}$. 1p(5p)

Korkeus on tällöin

$$\begin{aligned} h &= \frac{4000}{\pi d^2} \\ &= \frac{4000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}\right)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{2000}{\pi}}{\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}} \\ &= 2\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}. \end{aligned}$$

Kysytty suhde on

$$\frac{h}{d} = \frac{2\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}} = \underline{\underline{2}}.$$

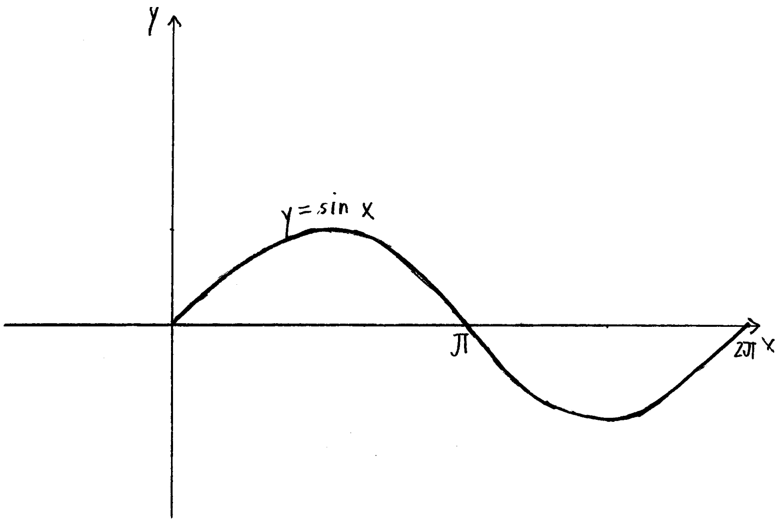
1p(6p)

12. Tarkastellaan funktiota
$$f(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt,$$
kun $0 \le x \le 2\pi$.

a) Perustele geometrisesti kaava $f(2\pi) = 2f(\pi)$.
b) Laske $f(x)$, kun $0 \le x \le 2\pi$.

Ratkaisu.

a) Funktion arvo
$$f(x_0) = \int_0^{x_0} |\sin t|\,dt$$
kertoo käyrän $y = \sin x$, x-akselin, suoran $x = 0$ ja suoran $x = x_0$ rajaaman alueen pinta-alan. Sini on positiivinen välillä $[0, \pi]$ ja negatiivinen välillä $[\pi, 2\pi]$. 1p



Koska $\sin(x + \pi) = -\sin x$, niin pinta-ala välillä $[0, \pi]$ on yhtä suuri kuin pinta-ala välillä $[\pi, 2\pi]$. 1p(2p)

Siten pinta-ala välillä $[0, \pi]$ on puolet pinta-alasta välillä $[0, 2\pi]$, eli
$$f(2\pi) = 2f(\pi).$$ 1p(3p)

b) Tarkastellaan erikseen tapauksia $0 \le x \le \pi$ ja $\pi < x \le 2\pi$.

$0 \leq x \leq \pi$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x |\sin t|\, dt \\
&= \int_0^x \sin t\, dt \\
&= \Big/_{0}^{x} -\cos t \\
&= -\cos x - (-\cos 0) \\
&= 1 - \cos x
\end{aligned}
$$

1p(4p)

$\pi < x \leq 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x |\sin t|\, dt \\
&= \int_0^\pi |\sin t|\, dt + \int_\pi^x |\sin t|\, dt \\
&= \int_0^\pi \sin t\, dt + \int_\pi^x -\sin t\, dt \\
&= \Big/_{0}^{\pi} -\cos t + \Big/_{\pi}^{x} \cos t \\
&= -\cos \pi - (-\cos 0) + \cos x - \cos \pi \\
&= 3 + \cos x.
\end{aligned}
$$

1p(5p)

Täten

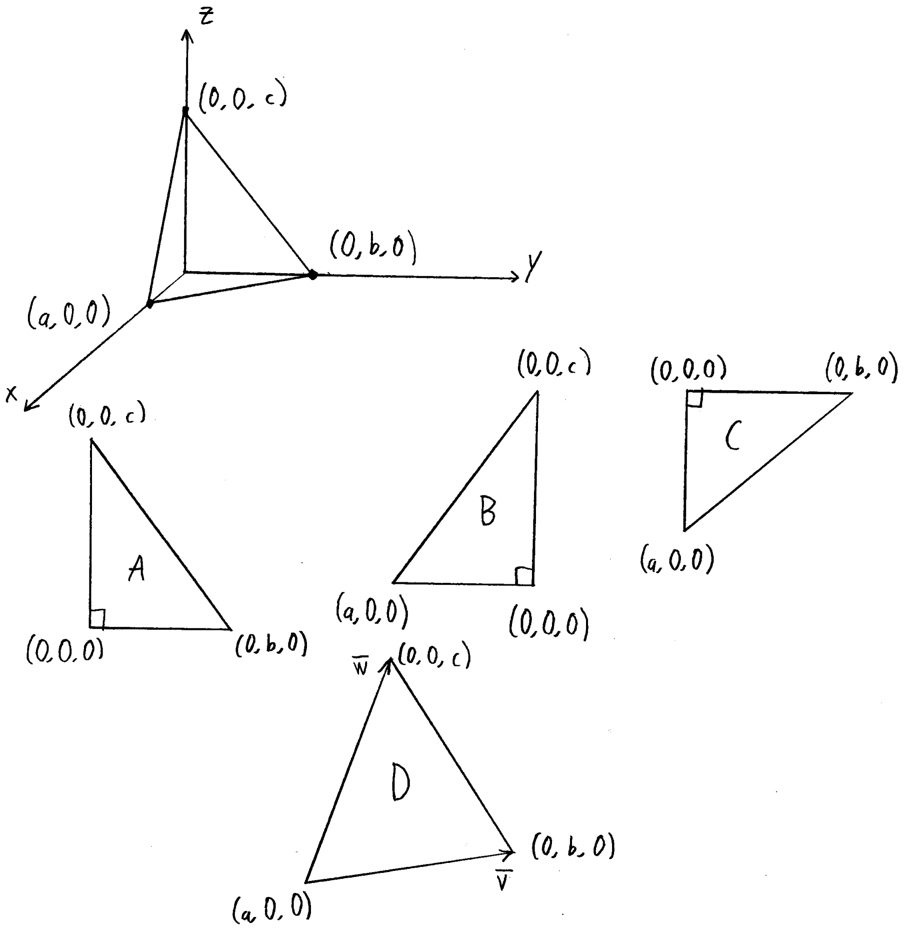
$$
f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{kun } 0 \leq x \leq \pi \\ 3 + \cos x, & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}
$$

1p(6p)

13. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tetraedrin kolme kärkeä ovat koordinaattiakseleiden pisteissä $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ja $(0, 0, c)$, ja neljäs kärki origossa $(0, 0, 0)$. Kärkien vastaisten tetraedrin tahkojen pinta-aloja merkitään samassa järjestyksessä kirjaimilla A, B, C, ja D, jossa D tarkoittaa origon vastaisen tahkon pinta-alaa. Osoita, että

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2.$$

Ratkaisu.



TAPA I:

Sivuvektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat

$$\bar{v} = -a\bar{i} + b\bar{j} + 0\bar{k}$$
$$\bar{w} = -a\bar{i} + 0\bar{j} + c\bar{k}.$$ 1p

Lasketaan pinta-alat

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}bc \\
B &= \frac{1}{2}ac \\
C &= \frac{1}{2}ab
\end{aligned}
$$

Koska $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, niin $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Pinta-ala D on

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2}|\bar{w}||\bar{v}|\sin\sphericalangle(\bar{w},\bar{v}) \\
&= \frac{1}{2}|\bar{w}||\bar{v}|\sqrt{1-\cos^2\sphericalangle(\bar{w},\bar{v})} \\
&= \frac{1}{2}|\bar{w}||\bar{v}|\sqrt{1-\left(\frac{\bar{w}\cdot\bar{v}}{|\bar{w}||\bar{v}|}\right)^2} && \text{2p(3p)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{w}|^2|\bar{v}|^2\left[1-\frac{(\bar{w}\cdot\bar{v})^2}{|\bar{w}|^2|\bar{v}|^2}\right]} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{w}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{w}\cdot\bar{v})^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(a^2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^4+a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-a^4} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2} && \text{2p(5p)}
\end{aligned}
$$

Nyt saadaan, että

$$
\begin{aligned}
D^2 &= \frac{1}{4}((bc)^2+(ac)^2+(ab)^2) \\
&= \frac{1}{4}(bc)^2+\frac{1}{4}(ac)^2+\frac{1}{4}(ab)^2 \\
&= (\frac{1}{2}bc)^2+(\frac{1}{2}ac)^2+(\frac{1}{2}ab)^2 \\
&= A^2+B^2+C^2 && \square \quad \text{1p(6p)}
\end{aligned}
$$

Vaihtoehtoinen tapa laskea pinta-ala D tavassa I:

Pinta-ala D saadaan helpoiten ristitulon pituudesta

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= -a\bar{i} + b\bar{j} + 0\bar{k} \\
\bar{w} &= -a\bar{i} + 0\bar{j} + c\bar{k} \\
\bar{v} \times \bar{w} &= (bc - 0 \cdot 0)\bar{i} + (0 \cdot (-a) - (-a) \cdot c)\bar{j} + ((-a) \cdot 0 - b \cdot (-a))\bar{k} \\
&= bc\bar{i} + ac\bar{j} + ab\bar{k}
\end{aligned}$$

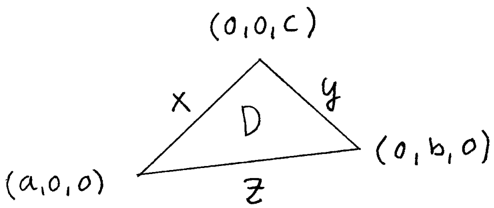
2p(3p)

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2}|\bar{v} \times \bar{w}| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}
\end{aligned}$$

2p(5p)

TAPA II:

Kolmas vaihtoehto pinta-alan laskemiseen on Heronin kaava, tosin se on työläs ilman symbolista laskinta. Merkitään origon vastaisen tahkon sivujen pituuksia x, y ja z:lla seuraavasti



Sivujen pituudet saadaan Pythagoraan lauseella

$$x = \sqrt{a^2 + c^2} \tag{1}$$

$$y = \sqrt{b^2 + c^2} \tag{2}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

1p(6p)

Kolmion ala saadaan Heronin kaavalla

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

jossa $p = (x + y + z)/2$. Sijoitetaan kaavat (1)–(3) Heronin kaavaan 1p(2p)
ja laskimella saadaan

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(b^2 + c^2) + b^2c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}.$$

3p(5p)

Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}
D^2 &= \frac{1}{4}((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2) \\
&= \frac{1}{4}(bc)^2 + \frac{1}{4}(ac)^2 + \frac{1}{4}(ab)^2 \\
&= (\frac{1}{2}bc)^2 + (\frac{1}{2}ac)^2 + (\frac{1}{2}ab)^2 \\
&= A^2 + B^2 + C^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

1p(6p)