Tiesitkö tämän?

MAFY-valmennuksen asiakkaat veivät

37 %

Helsingin suomenkielisen yleislääketieteellisen opiskelupaikoista vuonna 2017.

31 %

Aalto-yliopiston tuotantotalouden opiskelupaikoista vuonna 2017.

40% pk-seudun lukioista käyttää Mafynettiä

Mafynetti-kertauskurssit julkaistiin lukioiden käyttöön syksyllä 2017 ja nyt jo 40% pk-seudun lukioista on ottanut Mafynetin käyttöönsä! Paljon toivotut MAFY-valmennuksen oppimateriaalit lukion ensimmäiselle vuosikurssille julkaistaan lukuvuodelle 2018-2019.

Kysy lisää mafy.fi/yhteydenotto.

Pitkä matematiikka, kevät 2018

Mallivastaukset, 26.3.2018

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n kursseista pk-seudun ulkopuolella ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen ja Joonas Suorsa. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.
- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
`www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot`

1. Merkitään $f(x) = x^3 - x$. Laske a) $f(-2)$, b) $f'(3)$ ja c) $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Ratkaisu.

$$f(x) = x^3 - x.$$

a) Lasketaan $f(-2)$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - (-2) \\ &= -8 + 2 = \underline{\underline{-6}}. \end{aligned}$$

1p

1p(2p)

b) Derivoidaan $f(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

1p(3p)

Lasketaan $f'(3)$.

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 27 - 1 = \underline{\underline{26}}.$$

1p(4p)

c) Lasketaan määrätty integraali.

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^4 x^3 - x\,\mathrm{d}x \\ &= \Big/_0^4 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{\cancel{4}} \cdot 4^{\cancel{4}\,3} - \frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4}{2} \\ &= 16 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \\ &= 64 - 8 \\ &= \underline{\underline{56}}. \end{aligned}$$

1p(5p)

1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa. Käytännössä välivaiheiden kirjoittaminen on kuitenkin päässä laskemista varmempi tapa olla tekemättä huolimattomuusvirheitä, joten välivaiheet kannatti kirjoittaa.

2. Toisen asteen polynomifunktiolle voidaan käyttää kahta erilaista esitystapaa.

$$\begin{aligned} \text{Summamuoto:} \quad & ax^2 + bx + c. \\ \text{Tulomuoto:} \quad & a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

a) Muokkaa polynomi $2(x - 6)(x - 9)$ summamuotoon.
b) Muokkaa polynomi $x^2 + x - 12$ tulomuotoon.
c) Osoita, että $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, jos x_1 ja x_2 ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} 2(x-6)(x-9) &= 2(x^2 + x \cdot (-9) - 6x - 6 \cdot (-9)) \\ &= 2(x^2 - 9x - 6x + 54) \quad \text{oikein auki kertominen} = 1\text{p} \\ &= 2(x^2 - 15x + 54) \\ &= \underline{\underline{2x^2 - 30x + 108.}} \end{aligned}$$

1p

1p(2p)

b)

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1:}}$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} 3^2 + 3 - 12 = 9 + 3 - 12 = 0 \\ (-4)^2 - 4 - 12 = 16 - 16 = 0, \end{aligned}$$

joten $x = 3$ ja $x = -4$ ovat polynomin $x^2 + x - 12$ nollakohdat. 1p(3p)
Näin ollen

$$x^2 + x - 12 = \underline{\underline{(x-3)(x+4).}}$$

1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Etsitään polynomin x^2+x-12 nollakohdat, eli ratkaistaan yhtälö $x^2+x-12=0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}\\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2}\\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}\\
x &= \frac{-1 \pm 7}{2}\\
x &= \frac{-1-7}{2} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-1+7}{2}\\
x &= -4 \qquad \text{tai} \qquad x = 3.
\end{aligned}
$$
1p(3p)

Näin ollen

$$x^2+x-12 = \underline{\underline{(x-3)(x+4)}}.$$
1p(4p)

c) OLETUS: x_1 ja x_2 ovat yhtälön $ax^2+bx+c=0$ nollakohdat. Oletetaan lisäksi, että $a \neq 0$. Tätä ei sanottu tehtävänannossa, mutta se pitää olettaa, jotta väite olisi tosi.

VÄITE: $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Yhtälö

$$ax^2+bx+c=0$$

esitettynä tulomuodossa on

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

Kerrotaan sulut auki.

$$
\begin{aligned}
a(x-x_1)(x-x_2) &= a(x^2 + x\cdot(-x_2) - x_1\cdot x - x_1\cdot(-x_2))\\
&= a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)\\
&= ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2.
\end{aligned}
$$
1p(5p)

Vakiotermin lausekkeesta nähdään, että

$$\begin{aligned} ax_1x_2 &= c \quad \| : a \\ x_1x_2 &= \frac{a}{c}. \quad \square \end{aligned}$$

1p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan nojalla nollakohdat ovat

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Näin ollen siis

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \cdot 2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}} \\ &= \frac{c}{a}. \quad \square \end{aligned}$$

1p(5p)

1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

3. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 2\pi$.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x).$$

Derivoidaan $f(x)$.

$$f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x).$$ 1p

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) &= 0 \\ \sqrt{3}\sin(x) &= \cos(x) \quad \| : (\sqrt{3}\cos(x)) \qquad (1) \end{aligned}$$ 1p(2p)

On oltava $\cos(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x &= \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$ 1p(3p)

Ratkaisu toteuttaa ehdon $\cos(x) \neq 0$. Tutkitaan, löytyykö ratkaisuja, kun $\cos(x) = 0$. Tällöin yksikköympyrästä nähdään, että $\sin(x) = 1$ tai $\sin(x) = -1$, joten yhtälöstä (1) tulee $\sqrt{3} \cdot (\pm 1) = 0$, jotka ovat epätosia. Näin ollen yhtälöllä (1) ei ole ratkaisuja, kun $\cos(x) = 0$.

Tarkasteluvälille kuuluvat siis nollakohdat $x = \frac{\pi}{6}$ ja

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$$ 1p(4p)

Funktio on derivoituva tarkasteluvälillä. Tiedetään, että derivoituva funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Sijoitetaan:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$
$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}^2}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

1p(5p)

$$f(0) = \sin(0) + \sqrt{3}\cos(0) = 0 + \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$
$$f(2\pi) = \sin(2\pi) + \sqrt{3}\cos(2\pi) = 0 + \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}.$$

$$\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2,$$

joten suurin arvo on 2 ja pienin arvo on -2.

1p(6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Huom! Tämä on hankalampi keksiä, mutta tällä nokkelalla tavalla pääsee vähemmällä.

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) \quad \| : 2$$
$$\frac{f(x)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(x)$$

1p

Sijoitetaan $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ja $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{f(x)}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)$$

2p(3p)

Kosinin summakaavalla:

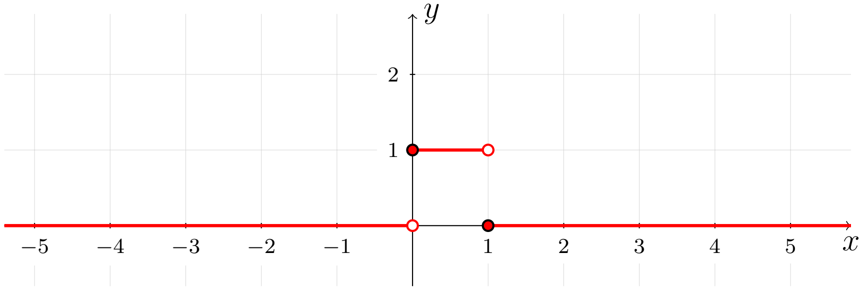
$$\frac{f(x)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \quad \| \cdot 2$$
$$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right). \tag{2}$$

2p(5p)

Kosini on jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on 2π, joten se saa tarkasteluvälillä kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$. Näin ollen yhtälön (2) nojalla nähdään, että tarkasteluvälillä funktion $f(x)$ pienin arvo on -2 ja suurin arvo on 2.

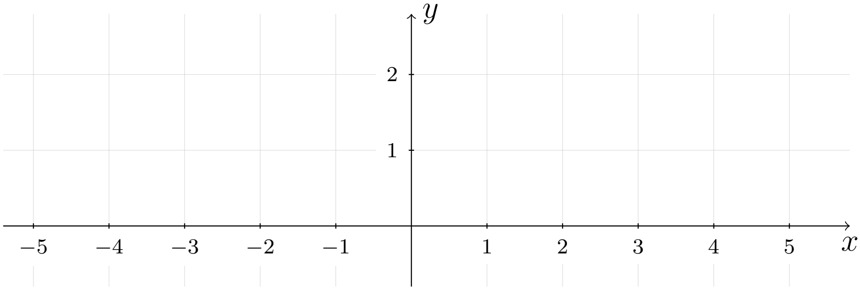
1p(6p)

4. Ikkunafunktioiden avulla voidaan kuvata esimerkiksi ajastimen toimintaa. Oheisessa kuviossa on erään tällaisen funktion $f(x)$ kuvaaja punaisella piirrettynä.

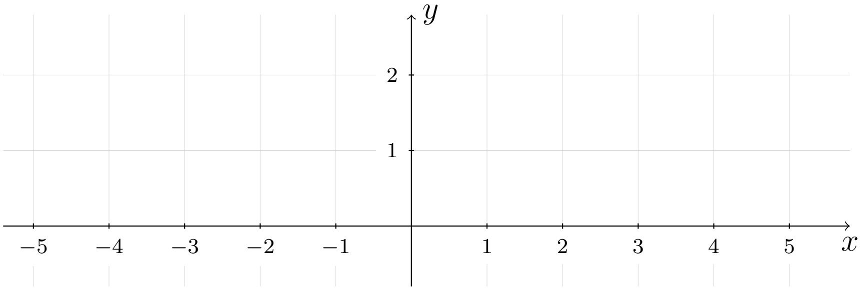


Piirrä alla oleviin koordinaatistoihin annettujen funktioiden kuvaajat välillä $-2 \leq x \leq 3$. Perusteluja ei vaadita.

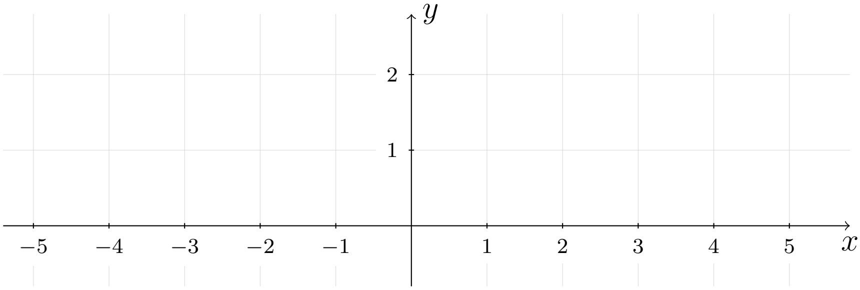
a) $g(x) = 2f(x)$



b) $h(x) = xf(x)$

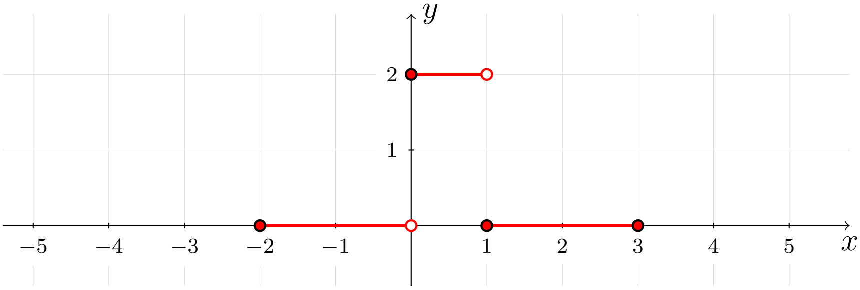


c) $k(x) = f(x + \frac{3}{2})$



Ratkaisu.

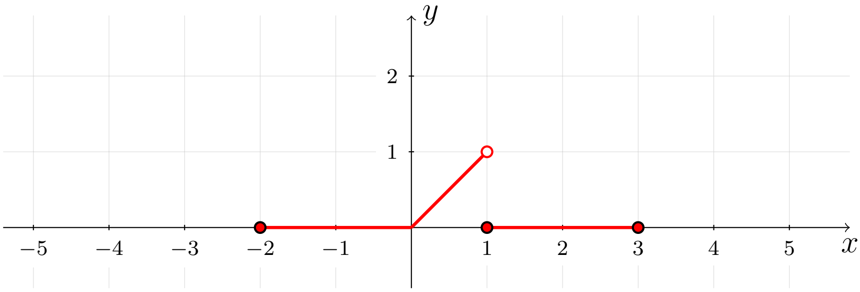
a) $g(x) = 2f(x)$



2p

Lisäselitys: Väleillä, joilla $f(x) = 0$, myös $g(x) = 2f(x) = 0$. Välillä $0 \leq x < 1$, jolla $f(x) = 1$, on $g(x) = 2f(x) = 2$.

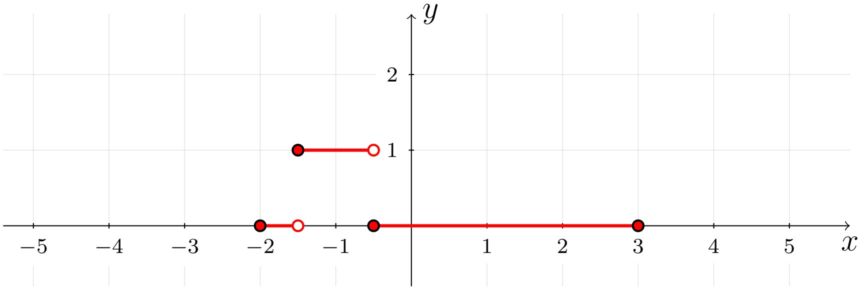
b) $h(x) = xf(x)$



2p(4p)

Lisäselitys: Väleillä, joilla $f(x) = 0$, myös $h(x) = xf(x) = 0$. Välillä $0 \leq x < 1$, jolla $f(x) = 1$, on $h(x) = xf(x) = x$.

c) $k(x) = f(x + \frac{3}{2})$



2p(6p)

Lisäselitys: $f(x) = 1$, kun $0 \leq x < 1$, joten $k(x) = f\left(x + \frac{3}{2}\right) = 1$, kun $0 \leq x + \frac{3}{2} < 1$, eli kun $-\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$. Muualla $f(x) = 0$, joten em. välin ulkopuolella myös $k(x) = 0$.

Pisteytyksestä kussakin kohdassa: Jos kuvaaja on oikeanlainen avoimilla väleillä, mutta välien päätepisteissä (merkinnöissä) on pieniä virheitä, saa 1p.

5. a) Muodosta sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2, 1)$ ja säde 2. Laske ympyrän niiden pisteiden y-koordinaatit, joiden x-koordinaatti on 1.
b) Määritä a-kohdan ympyrän pienin etäisyys suorasta $3y = 4x + 20$.

Ratkaisu.

a) Ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2, 1)$ ja säde on 2, on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$
$$\underline{\underline{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4}}$$

1p

Ratkaistaan y, kun $x = 1$.

$$(1 - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \qquad (1)$$

1p(2p)

$$(-1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$
$$1 + (y - 1)^2 = 4$$
$$(y - 1)^2 = 3$$
$$y - 1 = \pm\sqrt{3}$$
$$y = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kysytyt } y\text{-koordinaatit ovat } y_1 = 1 + \sqrt{3} \text{ ja } y_2 = 1 - \sqrt{3}.}}$

1p(3p)

Lisäselitys: Värilliset välivaiheet eivät ole välttämättömiä, koska yhtälön (1) voi ratkaista CAS-laskimen solve-toiminnolla. Tässä tapauksessa ratkaisussa kannattaa mainita, että yhtälö on ratkaistu laskimella.

b) Suora on

$$3y = 4x + 20$$
$$4x - 3y + 20 = 0$$

1p(4p)

joten pisteen etäisyyden suorasta kaavalla saadaan, että ympyrän keskipisteen (2,1) kohtisuora etäisyys tästä suorasta on

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 20|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5.$$

1p(5p)

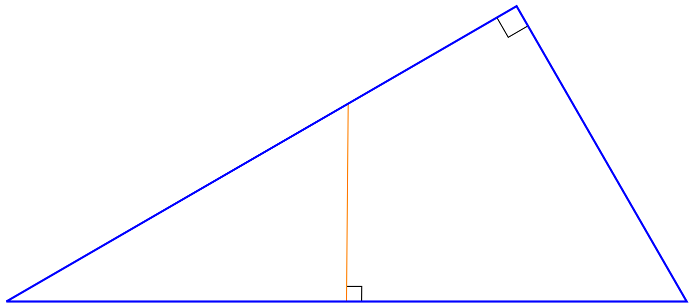
Ympyrän säde 2 on pienempi kuin tämä etäisyys, joten suora on ympyrän ulkopuolella. Näin ollen ympyrän kehä on ympyrän säteen verran lähempänä suoraa kuin ympyrän keskipiste, eli ympyrän pienin etäisyys suorasta on

$$d - r = 5 - 2 = \underline{\underline{3}}.$$

1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei edellytetä vastauksessa.

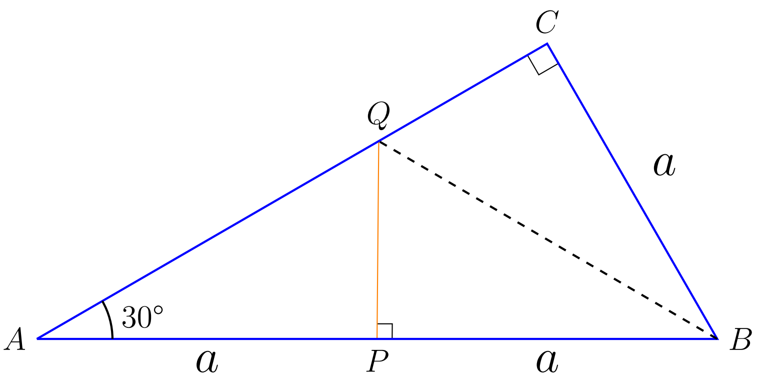
6. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 30 astetta. Kolmion hypotenuusan keskipisteeseen piirretään kuvion mukaisesti kohtisuora jana, jonka toinen päätepiste sijaitsee kolmion kateetilla. Laske niiden kahden osan pituuksien suhde, joihin kohtisuora jakaa kateetin.



Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Tiedetään, että $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, joten jos 30° kulman kanssa vastakkaisen sivun pituus on a, hypotenuusan pituus on $2a$, ja kohtisuora jakaa sen kahteen a:n pituiseen osaan. 1p



Kolmiot BCQ ja BPQ ovat yhtenevät (kaksi yhtä pitää sivua ja suorakulma). 2p(3p)
Näin ollen

$$|QC| = |QP|.$$ 1p(4p)

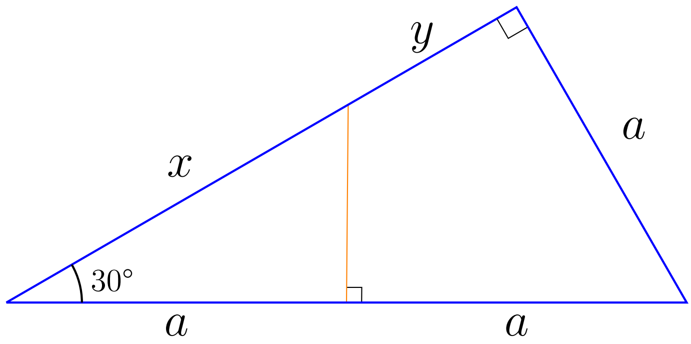
Kolmiosta APQ saadaan

$$\frac{|QP|}{|AQ|} = \sin(30^\circ)$$ 1p(5p)

$$\frac{|QC|}{|AQ|} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$ 1p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Tiedetään, että $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, joten jos 30° kulman kanssa vastakkaisen sivun pituus on a, hypotenuusan pituus on $2a$, ja kohtisuora jakaa sen kahteen a:n pituiseen osaan. 1p



Pidemmän kateetin pituus on Pythagoraan lauseella (Voi laskea myös trigonometrian avulla)

$$\sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$ 1p(2p)

Muodostuneen pienemmän kolmion hypotenuusan pituus x saadaan trigonometrialla

$$\cos(30^\circ) = \frac{a}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{x} \quad \| \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$ 1p(3p)

Osan y pituus on siis

$$\sqrt{3}a - \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$ 1p(4p)

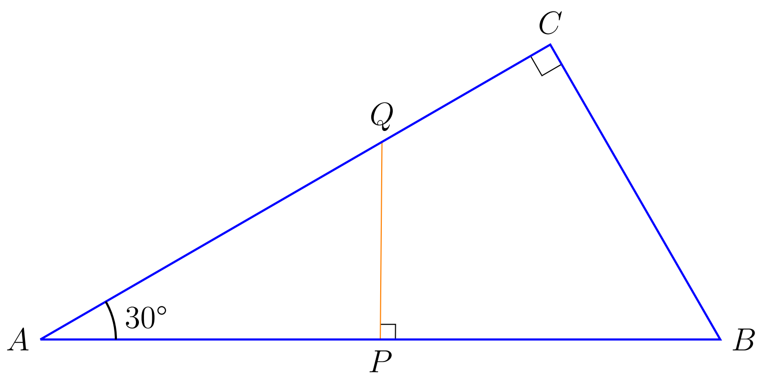
Kysytty osien suhde on siis

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \frac{\sqrt{3}\cancel{a} - \frac{2}{\sqrt{3}}\cancel{a}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\cancel{a}} \\ &= \frac{\sqrt{3}^2}{2} - 1 \\ &= \frac{3}{2} - 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

1p(5p)

1p(6p)

Ratkaisuvaihtoehto 3:



Piste P jakaa hypotenuusan AB kahtia, joten $|AB| = 2|AP|$. Suuresta kolmiosta ABC saadaan

$$\cos(30°) = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC|}{2|AP|}. \qquad (1)$$

1p

Pienemmästä kolmiosta APQ saadaan vastaavasti

$$\cos(30°) = \frac{|AP|}{|AQ|} \qquad (2)$$

1p(2p)

Yhtälöiden (1) ja (2) vasempien puolien tulo on yhtä suuri kuin oikeiden puolien tulo:

$$\begin{aligned}\cos^2(30°) &= \frac{|AC|}{2\cancel{|AP|}} \cdot \frac{\cancel{|AP|}}{|AQ|} = \frac{|AC|}{2|AQ|} \quad \| \cdot 2 \\ 2\cos^2(30°) &= \frac{|AC|}{|AQ|} \qquad (3)\end{aligned}$$

1p(3p)

Sijoitetaan $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \frac{|AC|}{|AQ|} \\
2 \cdot \frac{3}{4} &= \frac{|AC|}{|AQ|} \\
\frac{|AC|}{|AQ|} &= \frac{3}{2}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

1p(4p)

Näin ollen kysytty osien suhde on

$$
\begin{aligned}
\frac{|QC|}{|AQ|} &= \frac{|AC| - |AQ|}{|AQ|} \\
&= \frac{|AC|}{|AQ|} - 1 \quad \| \text{ Sij. (4).} \\
&= \frac{3}{2} - 1 \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

1p(5p)

1p(6p)

7. Lotto-peli alkoi Suomessa vuonna 1971, ja sen sääntöjä on muutettu useita kertoja vuosien varrella. Viimeisin sääntöuudistus tehtiin vuoden 2016 lopussa.

Ennen uudistusta arvottiin 7 varsinaista ja 2 lisänumeroa 39 numerosta. Uudistuksen jälkeen arvotaan 7 varsinaista ja vain 1 lisänumero 40 numerosta. Seuraavassa loton pelaaja täyttää yhden lottorivin eli käytännössä valitsee 7 numeroa.

Laske tuloksen ”6+1” todennäköisyys ennen uudistusta ja sen jälkeen. Tässä ”6+1” tarkoittaa tulosta, jossa on kuusi varsinaista ja yksi lisänumero oikein.
Ratkaisu.

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1:}}$

Ennen uudistusta:

Kaikkiaan erilaisia seitsemän numeron joukkoja voidaan valita yhteensä

$$\binom{39}{7}.$$ 1p

Kuusi oikeaa varsinaista numeroa voidaan valita kaikkiaan seitsemästä oikeasta numerosta

$$\binom{7}{6}$$ 1p(2p)

eri tavalla. Lisäksi lisänumero voidaan valita kahdesta lisänumerosta kahdella tavalla, joten tapahtumalle ”Ennen uudistusta 6+1 oikein” suotuisia rivejä on siis

$$2 \cdot \binom{7}{6}.$$ 1p(3p)

Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$P = \frac{2 \cdot \binom{7}{6}}{\binom{39}{7}} = 9{,}1021\ldots \cdot 10^{-7} \approx \underline{\underline{9{,}1 \cdot 10^{-7}}}.$$ 1p(4p)

Uudistuksen jälkeen: Tilanne on muuten sama kuin ennen uudistusta, mutta seitsemän numeron rivit valitaan 40 numerosta, ja lisänumerolle on

vain yksi vaihtoehto, 1p(5p)
joten uudistuksen jälkeen kysytty todennäköisyys on

$$P = \frac{1 \cdot \binom{7}{6}}{\binom{40}{7}} = 3{,}7546\ldots \cdot 10^{-7} \approx \underline{\underline{3{,}8 \cdot 10^{-7}}}.$$ 1p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Ennen uudistusta:

Todennäköisyys, että ensimmäinen numero on oikein, on $\frac{7}{39}$. Todennäköisyys, että toinen on oikein on $\frac{6}{38}$ jne. 1p
Kun kuusi ensimmäistä on mennyt oikein, on jäljellä $39 - 6 = 33$ numeroa, joista 2 on lisänumeroita. Näin ollen todennäköisyys, että viimeinen valittu numero osuu lisänumerolle, on $\frac{2}{33}$. 1p(2p)
Numeron, joka osuu lisänumerolle, ei tarvitse kuitenkaan olla viimeinen, vaan se voi olla mikä tahansa valituista numeroista, joten vaihtoehtoja sen sijainnille on 7. 1p(3p)
Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"6+1"}) = 7 \cdot \frac{7}{39} \cdot \frac{6}{38} \cdot \frac{5}{37} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} \cdot \frac{2}{33} = 9{,}1021\ldots \cdot 10^{-7} \approx \underline{\underline{9{,}1 \cdot 10^{-7}}}.$$ 1p(4p)

Uudistuksen jälkeen: Tilanne on sama kuin ennen uudistusta, mutta numerot valitaan 40 numerosta, eli mahdollisia numeroita on aina yksi enemmän ja lisänumeroita on vain yksi, sille on vain yksi vaihtoehto, 1p(5p)
joten

$$P(\text{"6+1"}) = 7 \cdot \frac{7}{40} \cdot \frac{6}{39} \cdot \frac{5}{38} \cdot \frac{4}{37} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{2}{35} \cdot \frac{1}{34} = 3{,}7546\ldots \cdot 10^{-7} \approx \underline{\underline{3{,}8 \cdot 10^{-7}}}.$$ 1p(6p)

8. Jyrki on 23-vuotias ja hänellä on kolme nuorempaa sisarusta, joiden ikien tulo on 156. Minkä ikäisiä Jyrkin sisarukset ovat? Esitä kaikki kokonaislukuratkaisut.

Ratkaisu.

Merkitään Jyrkin sisarusten ikiä muuttujilla x, y ja z. Sisarukset ovat Jyrkiä nuorempia, joten $x, y, z < 23$. Ikien tulo on 156. Jaetaan tämä alkutekijöihin.

$$xyz = 156$$
$$xyz = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$ 1p

Huomataan, että $2 \cdot 13 = 26 > 23$ ja $3 \cdot 13 = 39 > 23$, 1p(2p)
joten ainoat vaihtoehdot esittää 156 kolmen kokonaisluvun, jotka ovat pienempiä kuin 23, tulona ovat

$$xyz = 4 \cdot 3 \cdot 13$$ 1p(3p)
$$xyz = 2 \cdot 6 \cdot 13$$ 1p(4p)
$$xyz = 1 \cdot 12 \cdot 13.$$ 1p(5p)

Näin ollen Jyrkin sisaruksien iät ovat joko 4 vuotta, 3 vuotta ja 13 vuotta, 2 vuotta, 6 vuotta ja 13 vuotta tai 1 vuotta, 12 vuotta ja 13 vuotta. 1p(6p)

9. Tarkastellaan funktiota, jonka derivaattafunktio on myös derivoituva. Soveltamalla Newtonin menetelmää derivaattafunktioon saadaan selville funktion mahdollisen paikallisen ääriarvokohdan likiarvo.

Selvitä Newtonin menetelmällä funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^2 + x$$

mahdolliset ääriarvokohdat välillä]0,2[. Käytä alkuarvoa 0,5, laske kolme iteraatiota ja anna tulos viiden merkitsevän numeron tarkkuudella. Laske toinen mahdollinen ääriarvokohta samalla tavalla alkuarvoa 1,5 käyttäen. Määritä näiden tulosten avulla funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvot välillä]0,2[neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu.

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^2 + x.$$

Derivoidaan $f(x)$ ja merkitään derivaattafunktiota $g(x)$:llä

$$g(x) = f'(x) = x^4 - 4x + 1.$$ 1p

Ääriarvojen selvittämiseksi selvitetään funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat annetulla välillä. Selvitetään siis funktion $g(x)$:n nollakohdat Newtonin menetelmällä. Derivoidaan $g(x)$.

$$g'(x) = 4x^3 - 4.$$ 1p(2p)

Käytetään alkuarvona $x_1 = 0{,}5$. Iteroidaan kolme kertaa Newtonin menetelmällä.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \\ &= 0{,}5 - \frac{0{,}5^4 - 4 \cdot 0{,}5 + 1}{4 \cdot 0{,}5^3 - 4} = 0{,}2321428\ldots \\ x_3 &= 0{,}250961\ldots \\ x_4 &= 0{,}250992\ldots \approx 0{,}25099 \end{aligned}$$

1p(3p)

1p(4p)

Lasketaan toinen nollakohta samalla tavalla alkuarvolla $x_1 = 1{,}5$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{1{,}5^4 - 4 \cdot 1{,}5 + 1}{4 \cdot 1{,}5^3 - 4} = 1{,}493421\ldots \\ x_3 &= 1{,}493358\ldots \\ x_4 &= 1{,}493358\ldots \approx 1{,}4934 \end{aligned}$$

1p(5p)

Selvitetään derivaatan merkit nollakohtien välissä kulkukaaviota varten:

$$f'(0{,}1) = 0{,}1^4 - 4 \cdot 0{,}1 + 1 = 0{,}6001 > 0$$
$$f'(1) = -2 < 0$$
$$f'(1{,}8) = 4{,}2976 > 0$$

Kulkukaavio:

	0	0,25 ...	1,49 ...
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Kohdassa $x \approx 0{,}25099$ funktiolla $f(x)$ on siis paikallinen maksimi

$$f(0{,}25099) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}25099^5 - 2 \cdot 0{,}25099^2 + 0{,}25099 = 0{,}125197\ldots \approx \underline{\underline{0{,}1252}}$$

ja kohdassa $x \approx 1{,}4934$ funktiolla $f(x)$ on siis paikallinen minimi

$$f(1{,}4934) = -1{,}48145\ldots \approx \underline{\underline{-1{,}481}}.$$ 1p(6p)

10. Annukka ja Fareed yrittävät laskea seuraavien vektoreiden pistetulon ilman laskinta:

$$\bar{u} = 7\cos\frac{\pi}{5}\bar{i} + 7\sin\frac{\pi}{5}\bar{j} \quad \text{ja} \quad \bar{v} = 3\cos\frac{8\pi}{15}\bar{i} + 3\sin\frac{8\pi}{15}\bar{j}\,.$$

Heidän ratkaisunsa ovat seuraavat.

Annukan ratkaisu	Fareedin ratkaisu
$\bar{u}\cdot\bar{v} = 7(\cos\frac{\pi}{5}\bar{i} + \sin\frac{\pi}{5}\bar{j})\cdot 3(\cos\frac{8\pi}{15}\bar{i} + \sin\frac{8\pi}{15}\bar{j})$	Vektorien pituudet: $\lvert\bar{u}\rvert = 7$ ja $\lvert\bar{v}\rvert = 3$
$= 21(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{8\pi}{15})$	Pistetulon kaava: $\bar{u}\cdot\bar{v} = 7\cdot 3\cos(\bar{u},\bar{v})$
$= 21\cos\left(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5}\right)$	Vektorien välinen kulma: $\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}$
$= 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}\,.$	Siten $\bar{u}\cdot\bar{v} = 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}\,.$

a) Annukka ja Fareed ovat käyttäneet eri kaavoja pistetulon laskemiseksi. Esitä nämä kaavat yleisille vektoreille $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$ ja $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j}$.

b) Fareed on laskenut vektorien pituudet ja niiden välisen kulman. Esitä vektorit graafisesti ja merkitse kuvaan, miten Fareed on päätellyt vektorien välisen kulman.

c) Selitä lyhyesti rivi riviltä, miten Annukan ratkaisu etenee.

Ratkaisu.

a) Annukan käyttämä kaava:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j}) = a_xb_x + a_yb_y.$$

1p

Fareedin käyttämä kaava:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\cos(\bar{a},\bar{b})$$

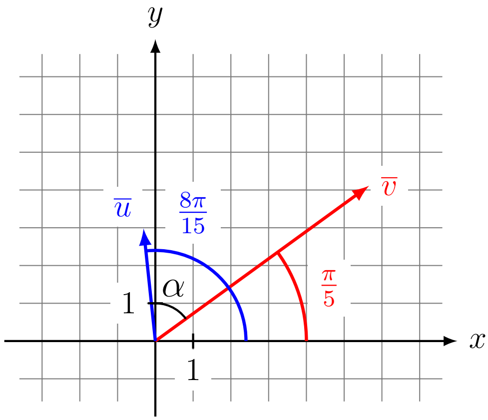
1p(2p)

b) Vektorit voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{u} = 7\left(\cos\frac{\pi}{5}\bar{i} + \sin\frac{\pi}{5}\bar{j}\right)$$
$$\bar{v} = 3\left(\cos\frac{8\pi}{15}\bar{i} + \sin\frac{8\pi}{15}\bar{j}\right).$$

Nähdään, että suluissa olevat vektorit ovat yksikköympyrän pisteiden paikkavektoreita, joita vastaava kulma on vektorin $\bar{u}$ tapauksessa $\frac{\pi}{5}$ ja vektorin $\bar{v}$ tapauksessa $\frac{8\pi}{15}$. Sulkujen edessä olevat kertoimet vaikuttavat ainoastaan vektorien pituuteen.

1p(3p)



Tästä Fareed on päätellyt, että vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma on

$$\alpha = \frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}.$$ 1p(4p)

c) Ensimmäinen rivi: Annukka muodosti vektoreiden $\overline{v}$ ja $\overline{u}$ pistetulon lausekkeen ja otti vektoreiden lausekkeista kertoimet 7 ja 3 yhteisiksi tekijöiksi.

Toinen rivi: Annukka laski kertoimien 7 ja 3 tulon, mistä tuli 21, ja laski a-kohdassa mainitulla pistetulon kaavalla sulkuihin jääneiden vektorien pistetulon. 1p(5p)

Kolmas rivi: Annukka muokkasi mielessään toisen rivin lausekkeen muotoon tulon järjestystä vaihtamalla

$$21\left(\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

Tämän jälkeen hän käytti kosinin summakaavaa

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

jonka avulla sai lausekkeen muotoon

$$21 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5}\right).$$

Neljäs rivi: Annukka sievensi kosinin sulkujen sisältä

$$\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3},$$

ja sijoitti kosinin arvon $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, minkä seurauksena hän sai lausekkeelle arvon

$$21\cos\left(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5}\right) = 21\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 21 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{2}.$$

1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita vastauksessa.

11. a) Anna esimerkki rationaalifunktiosta $f(x)$, jolle epäyhtälö $f(x) \geq 2$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$.

b) Anna esimerkki funktiosta $g(x) \geq 0$, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja jonka derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

Ratkaisu.

a) Rationaalifunktion lauseke on kahden polynomifunktion lausekkeiden osamäärä. Myös vakiofunktio on polynomifunktio, joten jos valitaan nimittäjäksi 1, saadaan tavallinen polynomifunktio, joka on rationaalifunktion erikoistapaus. Etsitään helppouden vuoksi polynomifunktio, jolle ehto toteutuu:

Annettu ehto $f(x) \geq 2$ on yhtäpitävä ehdon $f(x) - 2 \geq 0$ kanssa. Etsitään sellainen polynomifunktio $g(x)$, jolla on nollakohdat kohdissa $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$. Eräs tällainen polynomifunktio on

$$g(x) = (x + 1)x(x - 1)(x - 2).$$ 1p

Tarkastellaan funktion $g(x)$ kulkua merkkikaavion avulla.

	-1	0	1	2	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Näin ollen funktiolle

$$h(x) = -g(x) = -(x + 1)x(x - 1)(x - 2)$$

pätee $h(x) \geq 0$ täsmälleen silloin, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$, 1p(2p)
joten funktiolle

$$f(x) = h(x) + 2 = \underline{\underline{2 - (x + 1)x(x - 1)(x - 2)}}$$

pätee $f(x) \geq 2$ täsmälleen silloin, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$. 1p(3p)

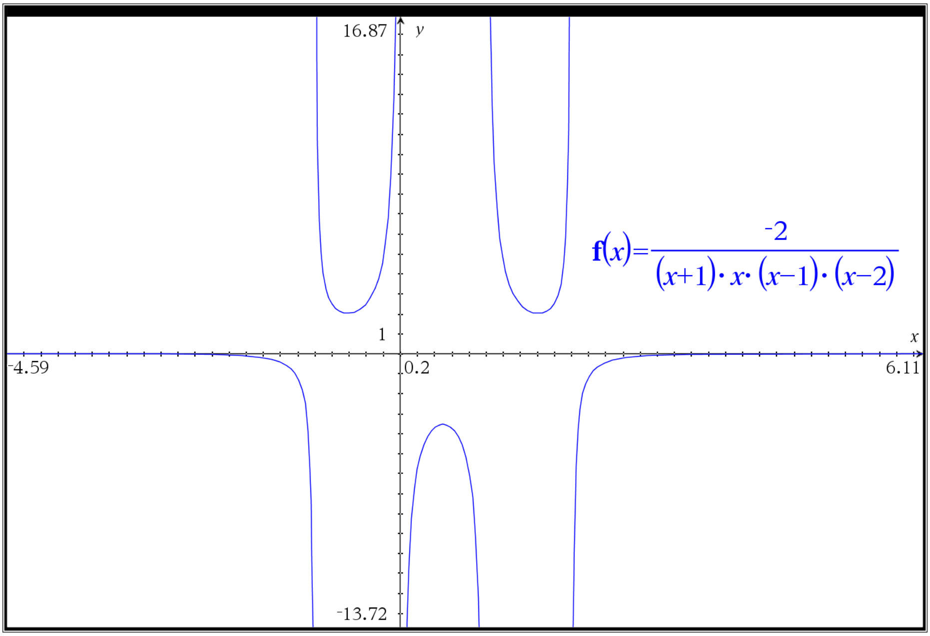
Lisäselitys: Jos ei esimerkiksi tiennyt, että polynomifunktiot ovat rationaalifunktioita, yksi tapa löytää sellainen rationaalifunktio, jonka nimittäjässä on muuttujaa x, on lähteä tutkimaan lauseketta

$$\frac{-1}{(x+1)x(x-1)(x-2)}.$$

Merkeistä voidaan päätellä, että tämä funktio on positiivinen, kun $-1 < x < 0$ tai $1 < x < 2$, ja muualla määrittelyjoukossaan negatiivinen. Nyt jos osoittajaan valitsee sopivan kokoisen luvun, kuten esimerkiksi

$$f_1(x) = \frac{-2}{(x+1)x(x-1)(x-2)},$$

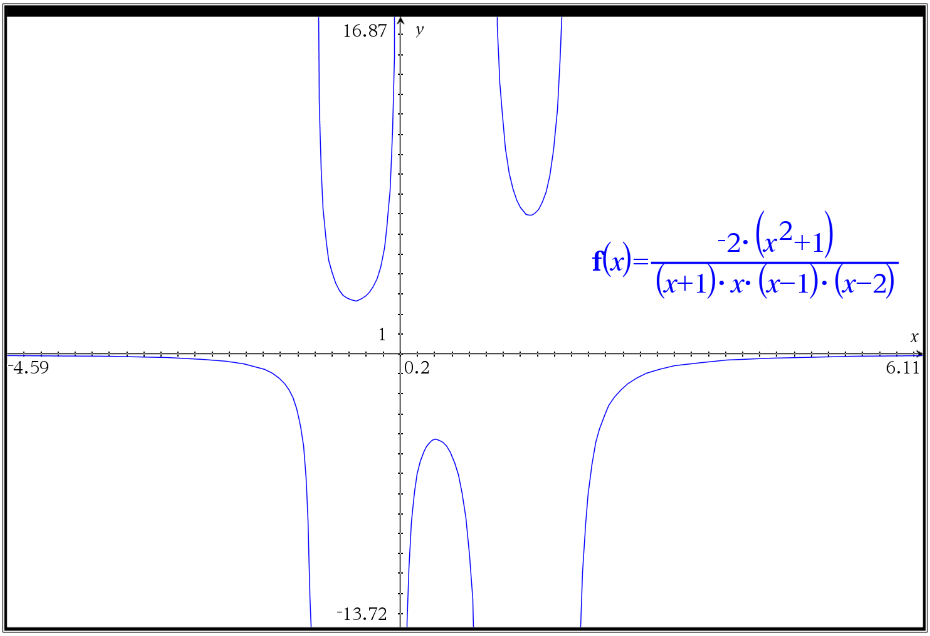
myös epäyhtälö $f(x) \geq 2$ toteutuu halutuilla väleillä.



Jos myös osoittajaan haluaa saada x:n, sinne voi kertoa sellaisen polynomin, jonka arvo kaikkialla on yli 1, jolloin ehdot toteutuvat edelleen. Esimerkiksi

$$f_2(x) = \frac{-2(x^2+1)}{(x+1)x(x-1)(x-2)}$$

toteuttaa halutut ehdot.



b)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Tiedetään, että eksponenttifunktio on kaikkialla positiivinen, joten etsitään funktiota, joka on muotoa

$$g(x) = e^{f(x)}.$$

Tämän funktion derivaatta on

$$g'(x) = f'(x)e^{f(x)},$$

joten sen derivaatan nollakohdat ovat samat kuin funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat. Esimerkiksi muotoa $x(ax-b)$ olevalla polynomilla on täsmälleen kaksi nollakohtaa ($x = 0$ ja $x = \frac{b}{a}$), jos $a, b \neq 0$, ja se on polynomifunktiona kaikkialla määritelty. Valitaan esimerkiksi

$$f'(x) = x(3x-2) = 3x^2 - 2x$$

Tämän eräs integraalifunktio on

$$f(x) = x^3 - x^2.$$

Näin ollen funktiolle

$$g(x) = e^{f(x)} = \underline{\underline{e^{x^3-x^2}}}$$

pätee $g(x) \geq 0$, se on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, koska polynomifunktiona $f(x)$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja myös eksponenttifunktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, ja sen derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa. 3p(6p)

Ratkaisuvaihtoehto 2:

On helpompi keksiä funktio $h(x) \geq 0$, jolla on vain yksi derivaatan nollakohta, koska tähän käy ylöspäin aukeava paraabeli. Esimerkiksi paraabelit

$$h_1(x) = (x-1)^2$$
$$h_2(x) = (x+1)^2$$

toteuttavat tämän ehdon. Näiden avulla voidaan määritellä paloittain funktio $g(x) \geq 0$, jolla on täsmälleen kaksi derivaatan nollakohtaa. Esimerkiksi funktio

$$\underline{\underline{g(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{kun } x \geq 0 \\ (x+1)^2, & \text{kun } x < 0 \end{cases}}}$$

sopii ratkaisuksi. Sillä on derivaatan nollakohdat $x = -1$ ja $x = 1$ ja se on binomin neliönä kaikkialla epänegatiivinen. 3p(6p)

Tehtävänannossa ei edellytetty, että funktio olisi kaikkialla derivoituva, joten myös paloittain määritelty funktio, joka ei ole tietyssä pisteessä derivoituva, käy ratkaisuksi.

RATKAISUVAIHTOEHTO 3:

Tiedetään, että eksponenttifunktio on kaikkialla positiivinen, joten etsitään funktiota, joka on muotoa

$$g(x) = f(x)e^x,$$

missä $f(x) \geq 0$. Tämän funktion derivaatta on

$$g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = (f'(x) + f(x))e^x.$$

Funktiolla on siis kaksi derivaatan nollakohtaa täsmälleen silloin, kun yhtälöllä

$$f'(x) + f(x) = 0$$

on kaksi eri ratkaisua. Jos $f(x)$ on toisen asteen polynomi, yhtälöllä on korkeintaan kaksi eri ratkaisua, joten kokeillaan funktiota $f(x) = x^2$, koska se on myös epänegatiivinen kaikkialla. Nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= 0 \\ 2x + x^2 &= 0 \\ x(2+x) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad x = -2. \end{aligned}$$

Näin ollen funktiolle

$$g(x) = f(x)e^x = \underline{\underline{x^2e^x}}$$

pätee $g(x) \geq 0$, se on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, koska polynomifunktiona $f(x)$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja myös eksponenttifunktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, ja sen derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa. 3p(6p)

Pisteytys b-kohdassa: Oikeanlainen funktio ja perustelut = 3p

Huom! Sopivia funktioita on monia erilaisia. Tässä malliratkaisussa on lähdetty rakentamaan kysytynlaista funktiota askel kerrallaan sen sijaan, että tarvitsisi nähdä intuitiolla, minkälainen funktio voisi sopia. Löytyy myös korkeamman asteen polynomifunktioita, jotka ovat sopivia.

12. a) Olkoon $a > 0$. Määritellään a-kantainen logaritmi funktion $f(x) = a^x$ käänteisfunktiona, toisin sanoen $\log_a x = f^{-1}(x)$. Kiinnitetään $x > 1$ ja määritellään $g(a) = \log_a x$. Osoita, että funktio $g(a)$ on vähenevä.
b) Olkoon $h(t)$ jatkuva funktio. Osoita, että

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

on kasvava täsmälleen silloin, kun $h(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu.

a)

Merkitään $g(a) = \log_a x$, kun $x > 1$ ja $a > 0$. Funktiota ei ole määritelty, kun $a = 1$, joten tarkastellaan funktiota $g(a)$, kun $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Väite: $g(a) = \log_a(x)$ on vähenevä.

Vastaesimerkki: Tarkastellaan arvoa $x = 2$. Tällöin

$$g(0{,}5) = \log_{0{,}5}(2) = -1,$$

koska $0{,}5^{-1} = 2$. Toisaalta

$$g(2) = \log_2(2) = 1,$$

koska $2^1 = 2$.

Näin ollen $g(2) > g(0{,}5)$, kun $x = 2$, joten g ei ole vähenevä, ja väite on epätosi. 3p

Funktiota $g(a)$ ei ole määritelty kohdassa $a = 1$. Koko sen määrittelyjoukossa $a > 0$, $a \neq 1$ se ei ole yllä mainitun vastaesimerkin nojalla vähenevä, mutta välillä $0 < a < 1$ funktio on vähenevä ja välillä $a > 1$ se on myös vähenevä. Esimerkiksi tapauksessa $a > 1$ väitteen voisi todistaa seuraavasti:

Todistus: Olkoon $1 < a_1 < a_2$. Logaritmifunktion määritelmän nojalla

$$x = a_1^{g(a_1)} = a_2^{g(a_2)} \tag{1}$$

Tehtävänannon mukaan $x > 1$, joten $g(a) = \log_a(x) > 0$ kaikilla $a > 1$. Näin ollen potenssifunktio $h(x) = x^{g(a_2)}$ on aidosti kasvava, joten

$$a_1^{g(a_2)} < a_2^{g(a_2)} \tag{2}$$

1p

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan, että

$$a_1^{g(a_2)} < a_1^{g(a_1)},$$ 1p(2p)

mistä eksponenttifunktion aidosti kasvavuuden nojalla seuraa, että

$$g(a_2) < g(a_1).$$

Näin ollen $g(a)$ on (aidosti) vähenevä, kun $a > 1$. □ 1p(3p)

Huomautus lukijalle: Koska väite on epätosi, yrityksistä osoittaa väite todeksi ei periaatteessa pitäisi saada pisteitä. Luultavasti tehtävänannossa on virhe ja tehtävän laatijalla on ollut tarkoituksena, että väite olisi tosi. Näin ollen voi olla että YTL päätyy antamaan osapisteitä myös virheellisistä todistusyrityksistä, jos niissä on joitain välivaiheita oikein. Maksimoidaksesi opiskelijasi pisteet, kannattaa tarkistaa, onko opiskelija tehnyt jotain oikein, ja antaa osapisteitä oikein tehdyistä välivaiheista.

b) Väite:

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

on kasvava täsmälleen silloin, kun $h(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Todistus: Olkoon $x_2 > x_1$. Oletetaan, että $h(t) \geq 0$ kaikilla t. Tarkastellaan erotusta

$$\begin{aligned} H(x_2) - H(x_1) &= \int_0^{x_2} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_1} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{x_1} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_1} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_1}^{x_2} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_{x_1}^{x_2} 0\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

1p(4p)

Tästä seuraa, siis, että

$$H(x_2) \geq H(x_1),$$

kun $h(t) \geq 0$, eli $H(x)$ on kasvava, kun $h(t) \geq 0$. 1p(5p)

Oletetaan sitten, että $h(t) < 0$ jollain välillä $]x_1, x_2[$. Tällöin vastaavasti tällä välillä

$$\begin{aligned} H(x_2) - H(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &< \int_{x_1}^{x_2} 0\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

eli $H(x)$ ei ole kasvava, jos $h(t) < 0$ yhdelläkin välillä. Näin ollen $H(x)$ on kasvava täsmälleen silloin, kun $h(t) \geq 0$ kaikilla t. $\square$ 1p(6p)

13. Funktio $f(x)$ määritellään kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} p(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{kun } x > 0, \\ \ln(1-x), & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

missä $p(x) = ax^2 + c$ on toisen asteen polynomi. Onko olemassa sellaisia kertoimia a ja c, että $f(x)$ on derivoituva?

Ratkaisu.

Merkitään funktiota

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = p(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{kun } x > 0 \\ h(x) = \ln(1-x), & \text{kun } x \leq 0. \end{cases}$$

Funktio $f(x)$ on tunnetusti derivoituva muualla kuin kohdassa $x = 0$. 1p
Tutkitaan, löytyykö sellaisia kertoimia a ja c, että funktio olisi derivoituva myös kohdassa $x = 0$.

Funktio on derivoituva kohdassa x, jos sen erotusosamäärällä on olemassa raja-arvo kohdassa x. Tarkastellaan erotusosamäärän raja-arvoa, kun x lähestyy nollaa vasemmalta puolelta. Funktion $h(x)$ derivaatta on

$$h'(x) = -\frac{1}{1-x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \\ &= h'(0) \\ &= -\frac{1}{1-0} \\ &= -1.\end{aligned}$$ 1p(2p)

Tutkitaan sitten erotusosamäärän raja-arvoa, kun x lähestyy nollaa oikealta puolelta.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-h(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{(ax^2+c)\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\ln(1-0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{(ax^2+c)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\left(ax+\frac{c}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$ 1p(3p)

Lauseke $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,1]$, kun x lähestyy nollaa, $\frac{c}{x}$ joko kasvaa rajatta tai vähenee rajatta ja ax lähestyy nollaa. Näin ollen erotusosamäärällä ei ole olemassa raja-arvoa, jos $c\neq 0$. 1p(4p)
Ainoa mahdollisuus on siis, että $c=0$. Tällöin raja-arvo on

$$\lim_{x\to 0+} ax\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Koska $x\to 0$, tämä raja-arvo on nolla a:n arvosta riippumatta. 1p(5p)
Ei siis ole olemassa sellaisia kertoimia a ja c, että erotusosamäärän vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot olisivat samat, joten ei ole olemassa sellaisia kertoimia a ja c, että funktio $f(x)$ olisi derivoituva. 1p(6p)