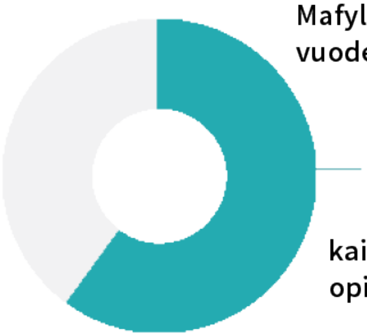
YO-MALLIVASTAUKSET

PITKÄ MATEMATIIKKA

KEVÄT 2020

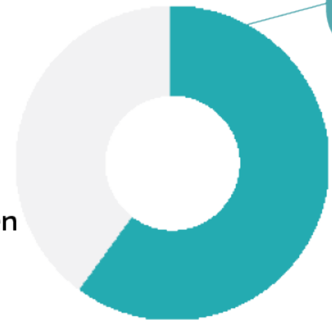
Tiesitkö tämän?



Mafylaiset veivät vuoden 2019 haussa

60%

kaikista lääketieteellisten opiskelupaikoista.



60 %

Pk-seudun lukioista käyttää **Mafynettiä.**

60 % PK-seudun lukioista käyttää Mafynettiä!
Mafynetti-oppimateriaaleja saa nyt myös lukion 1. vuoden kursseille

MALLIVASTAUSTEN TEKIJÄT:

Malliratkaisujen laatimisesta ovat vastanneet MAFY:n toinen perustaja Antti Suominen sekä MAFY:n oppimateriaalitiimi, jonka päätehtävä on laatia ja kehittää MAFY:n lukioon tarkoitettuja oppimateriaaleja.

Oppimateriaalitiimistä mukana olivat Antti Suomisen lisäksi Sakke Suomalainen ja Sampsa Kurvinen. Lisäksi työn tukena olivat Tuomas Hauvala ja Matti Virolainen.

MAFY-VALMENNUS on Helsingissä toimiva, matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen ja oppimateriaaleihin erikoistunut yritys.

PALVELUITAMME OVAT:

- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali
- Lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- Yo-kokeisiin valmentavat kurssit.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-VALMENNUKSEN YHTEYSTIEDOT:

https://mafyvalmennus.fi/yhteydenotto

Koetehtävät

Klikkaa tästä nähdäksesi kokeen esikatselutilassa (k20).

Linkit malliratkaisuihin

1. Yhtälöt ja epäyhtälöt (12 p.)

Tässä tehtävässä riittää pelkkä vastaus. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen enimmäispituus on 30 merkkiä.

1.1. Ratkaise yhtälö $-4x + 2 = 0$. (2 p.)

1.2. Ratkaise epäyhtälö $2x + 4 < -6$. (3 p.)

1.3. Ratkaise yhtälö $x^6 + x^3 = 0$. (3 p.)

1.4. Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat molemmat epäyhtälöt $-3x + 6 < 0$ ja $x^2 - 9 < 0$? (4 p.)

Ratkaisu.

1.1. Vastaus: $x = 1 : 2$. 2p (yht. 2p)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned} -4x + 2 &= 0 \\ 2 &= 4x \\ 4x &= 2 \quad \| : 4 \\ x &= \frac{2}{4} \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.2. Vastaus: $x < -5$. 3p (yht. 5p)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &< -6 \\ 2x &< -6 - 4 \\ 2x &< -10 \quad \| : 2 \\ x &< -5. \end{aligned}$$

1.3. Vastaus: $x = 0$ tai $x = -1$. 3p (yht. 8p)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned} x^6 + x^3 &= 0 \\ x^3 \cdot (x^3 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön nojalla $x = 0$ tai

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

1.4. Vastaus: $2 < x < 3$. 4p (yht. 12p)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned} -3x + 6 &< 0 \\ -3x &< -6 \quad \| : (-3) \quad \text{(suunta muuttuu)} \\ x &> 2. \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ (x-3)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännöllä

$$\begin{aligned} x - 3 = 0 \quad &\text{tai} \quad x + 3 = 0 \\ x = 3 \quad &\text{tai} \quad x = -3. \end{aligned}$$

Kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $x^2 - 9 < 0$, kun $-3 < x < 3$. Molemmat epäyhtälöt toteutuvat siis, kun $2 < x < 3$.

2. Vektorilaskuja (12 p.)

Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = 7\bar{i} + 2\bar{j}$ ja $\bar{b} = -3\bar{i} + 5\bar{j}$. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ kirjoitetaan muodossa i ja j. Kunkin vastauksen enimmäispituus on 30 merkkiä.

2.1. Laske $\bar{a} + \bar{b}$. (2 p.)

2.2. Laske $\bar{b} - 2\bar{a}$. (2 p.)

2.3. Laske $|\bar{b}|^2$. (2 p.)

2.4. Laske vektorin $\bar{a} + \bar{b}$ pituus kahden desimaalin tarkkuudella. (2 p.)

2.5. Laske $\bar{a} \cdot \bar{b}$. (2 p.)

2.6. Laske vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma asteen tarkkuudella. (2 p.)

Ratkaisu.

2.1. Vastaus: 4i + 7j. $\boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$

Lisäselitys:

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= 7\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{i} + 5\bar{j}\\ &= (7-3)\bar{i} + (2+5)\bar{j}\\ &= 4\bar{i} + 7\bar{j}.\end{aligned}$$

2.2. Vastaus: -17i + j. $\boxed{\text{2p (yht. 4p)}}$

Lisäselitys:

$$\begin{aligned}\bar{b} - 2\bar{a} &= -3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\cdot(7\bar{i} + 2\bar{j})\\ &= -3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\cdot 7\bar{i} - 2\cdot 2\bar{j}\\ &= -17\bar{i} + \bar{j}.\end{aligned}$$

2.3. Vastaus: 34. 2p (yht. 6p)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned}|\overline{b}|^2 &= (-3)^2 + 5^2\\ &= 34.\end{aligned}$$

2.4. Vastaus: 8,06. 2p (yht. 8p)

Lisäselitys: Kohdan 1 nojalla $\overline{a} + \overline{b} = 4\overline{i} + 7\overline{j}$.

$$\begin{aligned}|\overline{a} + \overline{b}|^2 &= (\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + \overline{b})\\ &= (4\overline{i} + 7\overline{j}) \cdot (4\overline{i} + 7\overline{j})\\ &= 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7\\ &= 16 + 49\\ &= 65\\ |\overline{a} + \overline{b}| &= \sqrt{65} = 8{,}0622\ldots \approx 8{,}06.\end{aligned}$$

2.5. Vastaus: -11. 2p (yht. 10p)

Lisäselitys:

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (7\overline{i} + 2\overline{j}) \cdot (-3\overline{i} + 5\overline{j})\\ &= 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 5\\ &= -21 + 10\\ &= -11.\end{aligned}$$

2.6. Vastaus: 105. 2p (yht. 12p)

Lisäselitys: Vektorin $\overline{a}$ pituus:

$$\begin{aligned}|\overline{a}| &= \sqrt{7^2+2^2}\\ &= \sqrt{53}.\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{b}$ pituus kohdan 3 perusteella $|\overline{b}| = \sqrt{34}$. Ratkaistaan vektorien välinen kulma

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}\\ \cos(\alpha) &= \frac{-11}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{34}}\\ \cos(\alpha) &= -0{,}2591\ldots\\ \alpha &= 105{,}018\ldots{}^\circ\\ \alpha &\approx 105^\circ.\end{aligned}$$

3. Pinta-alan ääriarvo (12 p.)

1. Laske integraali $\displaystyle\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx$. (3 p.)

2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t+\frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \le t \le \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? (9 p.)

Ratkaisu.

1. Selvitetään funktion $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ integraalifunktio. Tutkitaan funktion $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ derivaattaa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2} \quad \| \cdot -\frac{2}{\pi} \\
-\frac{2}{\pi}\mathrm{D}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\
\mathrm{D}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)
\end{aligned}$$

Näin ollen funktion $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ integraalifunktio on $-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Lasketaan integraali. Funktio $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ on epänegatiivinen välillä $[0, 2]$, joten

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, \mathrm{d}x &= \Big/_0^2 -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}} \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\cos(\pi) + \frac{2}{\pi}\cos(0) \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot(-1) + \frac{2}{\pi}\cdot 1 \\
&= \frac{4}{\pi}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}}
\end{aligned}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Pinta-ala on

$$A(t) = \int_{t}^{t+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\,\mathrm{d}x$$ 1p (yht. 4p)

$$\begin{aligned}
&= \Big/_{t}^{t+\frac{1}{2}} -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$ 1p (yht. 5p)

Derivoidaan $A(t)$. 1p (yht. 6p)

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + \frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)
\end{aligned}$$ 1p (yht. 7p)

Selvitetään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
A'(t) &= 0 \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) &= 0 \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)
\end{aligned}$$ 1p (yht. 8p)

Yhtälö on tosi, kun

$$\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\cdot t$$
$$\frac{\pi}{4}=0 \qquad \text{(ei ratkaisua)}$$

tai

$$\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{2}\cdot t \quad \boxed{\text{1p (yht. 9p)}}$$
$$\pi t=\pi-\frac{\pi}{4}$$
$$\pi t=\frac{3\pi}{4} \qquad \| :\pi$$
$$t=\frac{3}{4}. \quad \boxed{\text{1p (yht. 10p)}}$$

Funktion suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta tai välin päätepisteistä.

$$\begin{aligned}A(0)&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=0{,}1864\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\left(\frac{3}{2}\right)&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos(\pi)\right)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-(-1)\right)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=0{,}1864\ldots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\\
&= 0{,}4872\ldots \quad \leftarrow \text{suurin arvo.}
\end{aligned}
$$

1p (yht. 11p)

Vastaus: Kaistaleen pinta-alan arvo on suurin parametrin arvolla $t=\frac{3}{4}$. 1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Pinta-ala on

$$
A(t)=\int_{t}^{t+\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\,\mathrm{d}x
$$

1p (yht. 4p)

Integraalin pinta-alatulkinnasta voidaan päätellä, että $A(t)$ on kasvava kaikilla sellaisilla t, joilla

$$
\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\geq\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right).
$$

2p (yht. 6p)

Arvolla $t=0$ epäyhtälö pätee. Ratkaistaan, millä t:n arvolla yhtäsuuruus pätee.

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)
\end{aligned}
$$

1p (yht. 7p)

Vaihtoehto

$$\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot t$$

on mahdoton. Jäljelle jää vaihtoehto

$$\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} \cdot t$$ 1p (yht. 8p)

$$\pi t = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\pi t = \frac{3\pi}{4} \quad \| : \pi$$

$$t = \frac{3}{4}.$$ 1p (yht. 9p)

Täten siis $A(t)$ on kasvava kun $t \leq \frac{3}{4}$ ja vähenevä, kun $t \geq \frac{3}{4}$, joten pinta-alan arvo on suurin mahdollinen parametrin t arvolla $\frac{3}{4}$. 2p (yht. 11p)

Vastaus: Kaistaleen pinta-alan arvo on suurin parametrin arvolla $t = \frac{3}{4}$. 1p (yht. 12p)

4. Suurin etäisyys (12 p.)

Piste (x, y) toteuttaa epäyhtälön $x^4 + y^2 \leq 1$. Määritä pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta.

Ratkaisu.

Tarkastellaan pisteitä (x_1, y_1), joille pätee

$$x_1^4 + y_1^2 < 1.$$

Kaikille tällaisille pisteille löytyy toinen piste (x_2, y_2), jonka x- tai y-koordinaatin itseisarvo on suurempi kuin pisteellä (x_1, y_1) ja jolle pätee

$$x^4 + y^2 = 1.$$

Näin ollen pisteet, joiden etäisyys origosta on suurin, löytyvät pistejoukosta, jolle pätee

$$x^4 + y^2 = 1 \quad \text{2p (yht. 2p)}$$

$$y^2 = 1 - x^4$$

Näiden pisteiden (x, y) origosta mitatun etäisyyden neliö on

$$d(x) = x^2 + y^2 = x^2 + 1 - x^4. \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Etäisyyden suurin arvo on samassa kohdassa kuin etäisyyden neliön suurin arvo. 1p (yht. 5p)

Derivoidaan d.

$$d'(x) = 2x - 4x^3. \quad \text{1p (yht. 6p)}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$d'(x) = 0$$

$$2x - 4x^3 = 0$$

$$x(2 - 4x^2) = 0$$

Tulon nollasäännön nojalla joko $x = 0$ 1p (yht. 7p) tai

$$\begin{aligned} 2 - 4x^2 &= 0 \\ 4x^2 &= 2 \quad \| : 4 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

1p (yht. 8p)

Pisteet toteuttavat yhtälön

$$x^4 + y^2 = 1,$$

joten muuttujan x arvon täytyy olla välillä $[-1, 1]$. Funktion suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

$$\begin{aligned} d(-1) &= (-1)^2 + 1 - (-1)^4 = 1 \\ d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{5}{4} \\ d(0) &= 1 \\ d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{5}{4} \\ d(1) &= 1. \end{aligned}$$

3p (yht. 11p)

Pisteytyksestä: Suurimman arvon voi määrittää myös kulkukaavion avulla. Tällöin kulkukaaviosta saa 2p ja suurimman etäisyyden laskemisesta 2p.

Pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta on siis

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

1p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

5. Kuvioita ympyrässä (12 p.)

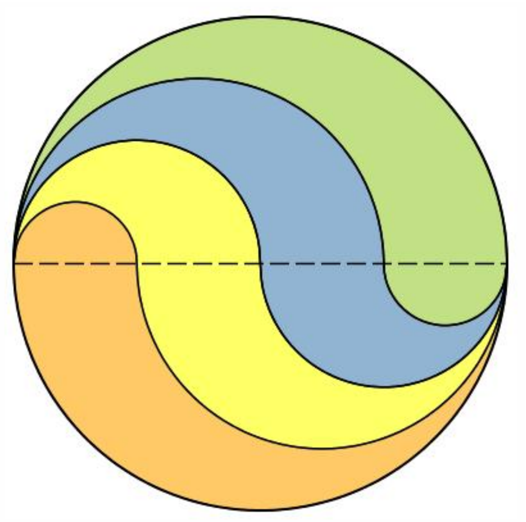
Aineisto:

5.A Kuvio: Ympyrä

Ympyrän säde on 4. Sen sisälle piirretään kolme käyrää, jotka yhdistävät ympyrän vaakasuoran halkaisijan päätepisteet kuvion 5.A osoittamalla tavalla. Jokainen käyrä koostuu kahdesta puoliympyrän kaaresta, ja ne jakavat ympyrän vaakasuoran halkaisijan neljään yhtä suureen osaan. Yhdessä käyrät jakavat ympyrän neljään eriväriseen alueeseen. Osoita, että niillä kaikilla on sama pinta-ala.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1



Kuvassa oranssi ja vihreä alue ovat symmetrian nojalla keskenään yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Vastaavasti keltainen ja sininen alue ovat symmetrian nojalla keskenään yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Jos siis yhden alueista pinta-ala on täsmälleen neljännes koko ympyrän pinta-alasta, kaikkien alueiden pinta-alojen täytyy olla keskenään samat. 3p (yht. 3p)

Koko ympyrän säde on 4, joten sen pinta-ala on

$$A = \pi \cdot 4^2 = 16\pi.$$ 2p (yht. 5p)

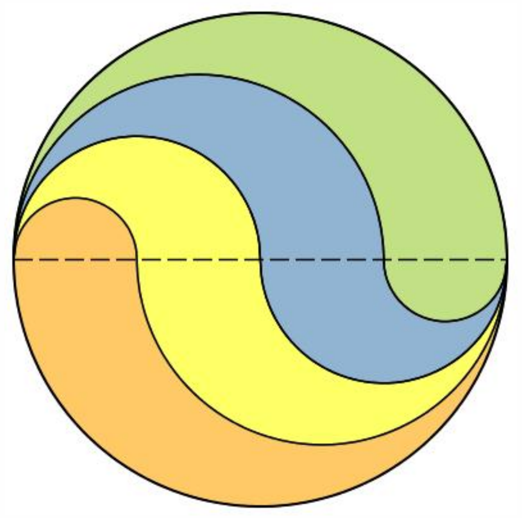
Kuvassa oranssin alueen pinta-ala koostuu kahdesta osasta: puoliympyrästä, jonka säde on 1 sekä kuviosta, jonka pinta-ala on puoliympyrän, jonka säde on 4 ja puoliympyrän, jonka säde on 3, erotus. 2p (yht. 7p)

Oranssin kuvion pinta-ala on siis

$$\begin{aligned} A_o &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \right) \quad \text{2p (yht. 9p)} \\ &= 4\pi, \quad \text{1p (yht. 10p)} \end{aligned}$$

eli tasan neljännes koko ympyrän pinta-alasta, 1p (yht. 11p) joten kaikkien alueiden pinta-alat ovat samat. 1p (yht. 12p) □

RATKAISUVAIHTOEHTO 2



Kuvassa oranssi ja vihreä alue ovat symmetrian nojalla keskenään yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Vastaavasti keltainen ja sininen alue ovat symmetrian nojalla keskenään yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Jos siis yhden alueista pinta-ala on täsmälleen neljännes koko ympyrän pinta-alasta, kaikkien alueiden pinta-alojen täytyy olla keskenään samat. 3p (yht. 3p)

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on niiden vastinosien neliöiden suhde. Ylemmän puoliympyrän sen osan pinta-ala, joka ei ole virheä, suhde koko ylemmän puoliympyrän pinta-alaan on siis

$$\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16},$$

eli vihreän alueen osuus ylemmästä puoliympyrästä on

$$1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$ 3p (yht. 6p)

Vastaavasti virheän osuus alemmasta puoliympyrästä on

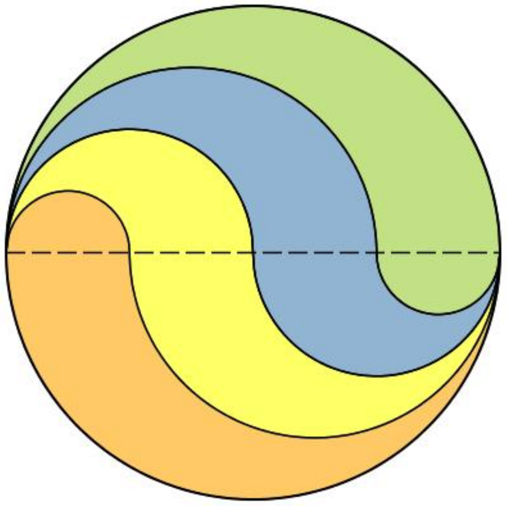
$$\frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}.$$ 3p (yht. 9p)

Merkitään koko ympyrän pinta-alaa A:lla. Näin ollen vihreän alueen pinta-ala on

$$\frac{7}{16} \cdot \frac{A}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{A}{2} = \frac{A}{4}.$$ 2p (yht. 11p)

Vihreän alueen pinta-ala on siis täsmälleen neljännes ympyrän pinta-alasta, joten kaikkien alueiden pinta-alat ovat keskenään samat. 1p (yht. 12p) □

RATKAISUVAIHTOEHTO 3



Kuvassa oranssi ja vihreä alue ovat symmetrian nojalla keskenään yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Vastaavasti keltainen ja sininen alue ovat symmetrian nojalla keskenään yhtenevät, joten niiden pinta-alat ovat samat. Näin ollen riittää osoittaa, että oranssin alueen pinta-ala on yhtä suuri kuin keltaisen alueen pinta-ala. 2p (yht. 2p)

Kuvassa oranssin alueen pinta-ala koostuu kahdesta osasta: puoliympyrästä, jonka säde on 1 sekä kuviosta, jonka pinta-ala on puoliympyrän, jonka säde on 4 ja puoliympyrän, jonka säde on 3, erotus. 2p (yht. 4p)

Oranssin kuvion pinta-ala on siis

$$A_o = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \right)$$ 2p (yht. 6p)

$$= 4\pi.$$ 1p (yht. 7p)

Kuvassa keltaisen alueen pinta-ala koostuu kahdesta osasta: 1) puoliympyrän, jonka säde on 2 ja puoliympyrän, jonka säde on 1 erotuksesta, ja 2) puoliympyrän, jonka säde on 3 ja puoliympyrän, jonka säde on 2, erotuksesta. 2p (yht. 9p)

Keltaisen alueen pinta-ala on siis

$$A_k = \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \right)$$ 2p (yht. 11p)

$$= 4\pi.$$ 1p (yht. 12p)

Näin ollen alueiden pinta-alat ovat samat. $\square$

6. Paraabeli ja piste (12 p.)

Tässä tehtävässä vastaukset voi antaa joko tarkkoina arvoina tai likiarvoina kahden desimaalin tarkkuudella.

Tarkastellaan paraabelia $y = x^2$ ja pistettä $A = (1, -1)$.

1. Mihin paraabelin pisteisiin piirretyt tangentit kulkevat pisteen A kautta? (4 p.)
2. Määritä pistettä A lähinnä oleva paraabelin piste ja sen etäisyys pisteestä A. (8 p.)

Ratkaisu.

1. Merkitään kysyttyä tangenttisuoran ja käyrän sivuamispistettä (x_0, y_0). Yleisesti pisteen (x_0, y_0) kautta kulkeva suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

missä k on suoran kulmakerroin.

Kohdassa x_0 käyrän $y = f(x) = x^2$ piste on (x_0, x_0^2), joten sen kautta kulkevan tangenttisuoran yhtälö on

$$y - x_0^2 = k(x - x_0).$$

Tangentin kulmakerroin on käyrän $y = f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0, eli

$$k = f'(x_0) = 2x_0.$$ 1p (yht. 1p)

Tangentin yhtälö on siis

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0).$$ 1p (yht. 2p)

Tangentti kulkee pisteen $A(1, -1)$ kautta, joten $x = 1$ ja $y = -1$ toteuttavat tangentin yhtälön. Sijoitetaan nämä tangentin yhtälöön.

$$-1 - x_0^2 = 2x_0(1 - x_0).$$ 1p (yht. 3p)

Ratkaistaan tästä yhtälöstä x_0 CAS-ohjelmalla:

$$x_0 = -\sqrt{2} + 1 \qquad \text{TAI} \qquad x_0 = \sqrt{2} + 1.$$

Kohtiin $x_1 = -\sqrt{2} + 1$ ja $x_2 = \sqrt{2} + 1$ piirretyt tangentit siis kulkevat pisteen A kautta. Lasketaan näitä kohtia vastaavat y:n arvot.

$$y_1 = f(x_1) = x_1^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$y_2 = f(x_2) = x_2^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Vastaus: Pisteisiin $(-\sqrt{2}+1, 3-2\sqrt{2})$ ja $(\sqrt{2}+1, 3+2\sqrt{2})$ piirretyt tangentit kulkevat pisteen $A(1, -1)$ kautta. 1p (yht. 4p)

Pisteytyksestä: Vastauksen voi antaa myös likiarvona kahden desimaalin tarkkuudella. Tällöin kysytyt pisteet olisivat $(-0{,}41; 0{,}17)$ ja $(2{,}41; 5{,}83)$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

2. Parabeelin piste kohdassa x on $B(x, x^2)$. Pisteiden $A(1, -1)$ ja $B(x, x^2)$ välisen etäisyyden neliö on

$$d(x) = (x-1)^2 + (x^2 - (-1))^2 \quad \text{2p (yht. 6p)}$$
$$= x^4 + 3x^2 - 2x + 2. \quad \text{1p (yht. 7p)}$$

Derivoidaan funktio d.

$$d'(x) = 4x^3 + 6x - 2. \quad \text{1p (yht. 8p)}$$

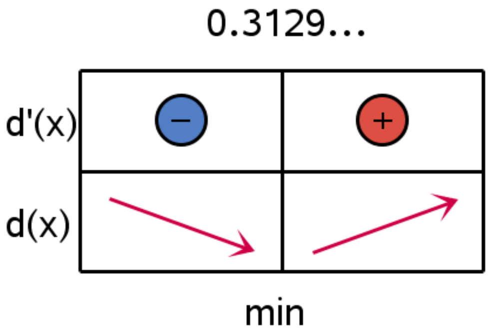
Määritetään derivaatan nollakohdat CAS-ohjelman avulla.

$$x = 0{,}3129\ldots \quad \text{1p (yht. 9p)}$$

Lasketaan derivaatan arvo kohdissa $x = 0$ ja $x = 1$.

$$d'(0) = -2 < 0$$
$$d'(1) = 8 > 0.$$

Muodostetaan kulkukaavio.



1p (yht. 10p)

Funktio $d(x)$ saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $x = 0{,}3129\ldots \approx 0{,}31$. Lasketaan tätä kohtaa vastaava y-koordinaatti käyrältä $y = f(x) = x^2$:

$$f(0{,}3129\ldots) = (0{,}3129\ldots)^2 = 0{,}097911\ldots \approx 0{,}10.$$

Pistettä A lähimpänä on siis paraabelin piste $B(0{,}31; 0{,}10)$. 1p (yht. 11p)

Pisteiden välinen etäisyys on

$$\sqrt{d(0{,}3129\ldots)} = 1{,}2951\ldots \approx 1{,}30.$$ 1p (yht. 12p)

Vastaus: Pistettä A lähimpänä on paraabelin piste $B(0{,}31; 0{,}10)$ ja pisteiden A ja B välinen etäisyys on $1{,}30$.

7. Yatzy (12 p.)

Yatzy-noppapelissä pelaaja heittää viittä noppaa. Tutkitaan tarkemmin heittoja, joiden tuloksena saadaan *täyskäsi* tai *neliluku* yhdellä viiden nopan heitolla. Täyskädellä tarkoitetaan tulosta, jossa yksi silmäluku esiintyy kolme kertaa ja joku toinen silmäluku kaksi kertaa. Neliluvussa esiintyy neljä samaa silmälukua ja yksi muu silmäluku.

1. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan täyskäsi, jossa esiintyy kolme kuutosta ja kaksi viitosta. (3 p.)

2. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan täyskäsi. (6 p.)

3. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan neliluku. (3 p.)

Ratkaisu.

1. Tarkastellaan erilaisia mahdollisia viiden nopan silmälukujen kombinaatioita siten, että nopat erotetaan toisistaan. Kullakin nopalla on kuusi mahdollista silmälukua, ja noppia on viisi kappaletta, joten mahdollisia kombinaatioita on yhteensä

$$A = 6^5 \,\text{kpl.}$$ 1p (yht. 1p)

Kysytyssä täyskädessä on kolme kuutosta ja noppia on viisi. On siis

$$\binom{5}{3} = 10$$

vaihtoehtoa, minkä noppien silmäluvut ovat kuusi. Jäljelle jääviä noppia on kaksi ja niiden molempien silmäluvut ovat viisi, joten on vain yksi vaihtoehto, minkä jäljelle jäävien noppien silmäluvut ovat viisi: molempien. Näin ollen suosuisia kombinaatioita on

$$S_1 = 10 \,\text{kpl.}$$ 1p (yht. 2p)

Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{kolme 6 ja kaksi 5}) = \frac{S_1}{A} = \frac{10}{6^5} = 0{,}001286\ldots \approx 0{,}0013 = 0{,}13\%.$$

Vastaus: Todennäköisyys saada täyskäsi, jossa on kolme kuutosta ja kaksi vitosta, on $0{,}0013 = 0{,}13\%$. 1p (yht. 3p)

2. Kohdassa 1 laskettiin todennäköisyys, että saadaan täyskäsi, jonka silmäluvut oli määrätty. Jos valitaan ensin, mikä sama silmäluku on kolmessa nopassa ja sitten mikä sama silmäluku on kahdessa nopassa, saadaan, että ensimmäisessä valinnassa on 6 vaihtoehtoa ja toisessa 5 vaihtoehtoa, joten erilaisia täyskäsiä on yhteensä

$$6 \cdot 5 = 30$$ 4p (yht. 7p)

kappaletta.

Pisteytyksestä: Kolmikon vaihtoehdot = 2 p ja kaksikon vaihtoehdot = 2 p.

Kohdan 1 nojalla kutakin täyskättä vastaavia kombinaatioita on 10 kappaletta, joten erilaisia suotuisia kombinaatioita on siis

$$S_2 = 30 \cdot 10 = 300$$

kappaletta. Kaikkiaan kombinaatioita on sama 6^5, mikä oli kohdassa 1. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{täyskäsi}) = \frac{S_2}{A} = \frac{300}{6^5} = 0{,}03858\ldots \approx 0{,}039 = 3{,}9\%.$$

Vastaus: Todennäköisyys saada täyskäsi on $0{,}039 = 3{,}9\%$. 2p (yht. 9p)

3. Lasketaan neliluvun todennäköisyys samalla tavalla kuin kohdissa 1 ja 2 laskettiin täyskäden todennäköisyys. Jos valitaan neljän nopan samaksi silmäluvuksi tietty luku ja yhden nopan eri silmäluvuksi tietty luku, on siis

$$\binom{5}{4} = 5$$ 1p (yht. 10p)

kombinaatiota, jotka vastaavat tätä kyseistä määrättyä nelilukua. Jos valitaan ensin, mikä sama silmäluku on neljässä nopassa ja sitten mikä eri silmäluku on viimeisessä nopassa, saadaan, että ensimmäisessä valinnassa on 6 vaihtoehtoa ja toisessa 5 vaihtoehtoa, joten erilaisia nelilukuja on yhteensä

$$6 \cdot 5 = 30.$$ 1p (yht. 11p)

Näin ollen nelilukuja vastaavia suotuisia kombinaatioita on yhteensä

$$S_3 = 30 \cdot 5 = 150$$

kappaletta. Kaikkiaan noppakombinaatioita on sama $A = 6^5$, mikä oli kohdassa 1. Kysytty todennäköisyys on siis

$$P(\text{neliluku}) = \frac{S_3}{A} = \frac{150}{6^5} = 0{,}01929\ldots \approx 0{,}019 = 1{,}9\%.$$

Vastaus: Todennäköisyys saada neliluku on $0{,}019 = 1{,}9\%$. 1p (yht. 12p)

8. Polynomien jakoalgoritmi (12 p.)

Polynomien jakoalgoritmilla voi jakaa esimerkiksi polynomin

$$p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$$

polynomilla $q(x) = x^2 - 3x + 1$. Tässä on suoritettu jakoalgoritmin ensimmäiset vaiheet:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3)q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

Selitä sanallisesti, mitä tässä on tehty, ja suorita jakoalgoritmi välivaiheineen loppuun asti.

Ratkaisu.

Ensimmäisessä vaiheessa katsotaan jaettavan polynomin

$$p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$$

korkeimman asteen termiä, eli termiä x^6 ja ilmaistaan se jakajana olevan polynomin

$$q(x) = x^2 - 3x + 1$$

avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} x^6 &= x^4 \cdot x^2 \quad \boxed{\text{1p (yht. 1p)}} \\ &= x^4 \cdot (x^2 - 3x + 1 + 3x - 1) \quad \boxed{\text{1p (yht. 2p)}} \\ &= x^4 \cdot (x^2 - 3x + 1) + 3x^5 - x^4 \\ &= x^4 \cdot q(x) + 3x^5 - x^4, \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}} \end{aligned}$$

jolloin saadaan tehtävänannon ensimmäisen vaiheen yhtälö seuraavasti

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 q(x) + 3x^5 - x^4 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= x^4 q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4. \quad \boxed{\text{1p (yht. 4p)}} \qquad (1) \end{aligned}$$

Toisessa vaiheessa katsotaan jaettavan polynomin edellisen vaiheen muodon korkeimman asteen termiä niistä termeistä, jossa ei ole kertojana polynomia $q(x)$, eli termiä $3x^5$. Se ilmaistaan polynomin $q(x)$ avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} 3x^5 &= 3x^3 \cdot x^2 \\ &= 3x^3 \cdot (x^2 - 3x + 1 + 3x - 1) \\ &= 3x^3 \cdot (x^2 - 3x + 1) + 9x^4 - 3x^3 \\ &= 3x^3 \cdot q(x) + 9x^4 - 3x^3. \quad \boxed{\text{1p (yht. 5p)}} \end{aligned}$$

Tällöin voidaan jatkaa ensimmäisen vaiheen yhtälöstä (1) seuraavasti:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= x^4 q(x) + 3x^3 q(x) + 9x^4 - 3x^3 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3) q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \quad \boxed{\text{1p (yht. 6p)}} \end{aligned} \tag{2}$$

eli saadaan tehtävänannossa näytetty algoritmin toinen vaihe.

Pisteytyksestä: Yhtälöiden sijaan riittävän täsmällinen sanallinen selitys ideasta ja vaiheista riittää.

Suoritetaan jakoalgoritmi vastaavasti loppuun saakka.

$$\begin{aligned} 4x^4 &= 4x^2 \cdot x^2 \\ &= 4x^2 \cdot (x^2 - 3x + 1 + 3x - 1) \\ &= 4x^2 \cdot (x^2 - 3x + 1) + 12x^3 - 4x^2 \\ &= 4x^2 \cdot q(x) + 12x^3 - 4x^2. \quad \boxed{\text{1p (yht. 7p)}} \end{aligned}$$

Yhtälöstä (2) saadaan siis

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^4 + 3x^3) q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3) q(x) + 4x^2 \cdot q(x) + 12x^3 - 4x^2 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2) q(x) + 11x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \quad \boxed{\text{1p (yht. 8p)}} \end{aligned} \tag{3}$$

Seuraava vaihe:

$$\begin{aligned} 11x^3 &= 11x \cdot x^2 \\ &= 11x \cdot (x^2 - 3x + 1 + 3x - 1) \\ &= 11x \cdot (x^2 - 3x + 1) + 33x^2 - 11x \\ &= 11x \cdot q(x) + 33x^2 - 11x. \end{aligned}$$ 1p (yht. 9p)

Yhtälöstä (3) saadaan siis

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2)q(x) + 11x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2)q(x) + 11x \cdot q(x) + 33x^2 - 11x + 3x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x)q(x) + 36x^2 - 14x + 4 \end{aligned} \tag{4}$$ 1p (yht. 10p)

Seuraava vaihe:

$$\begin{aligned} 36x^2 &= 36 \cdot x^2 \\ &= 36 \cdot (x^2 - 3x + 1 + 3x - 1) \\ &= 36 \cdot (x^2 - 3x + 1) + 108x - 36 \\ &= 36 \cdot q(x) + 108x - 36. \end{aligned}$$ 1p (yht. 11p)

Yhtälöstä (4) saadaan siis

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x)q(x) + 36x^2 - 14x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x)q(x) + 36 \cdot q(x) + 108x - 36 - 14x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36)q(x) + 94x - 32 \end{aligned}$$ 1p (yht. 12p)

Lopputulos kannattaa tarkistaa CAS-ohjelmalla. Esimerkiksi TI-Nspirellä sen voi tarkistaa seuraavasti:

$$\mathrm{polyQuotient}\left(x^6-4\cdot x^4+2\cdot x^3+7\cdot x^2-3\cdot x+4, x^2-3\cdot x+1\right)$$
$$\blacktriangleright\ x^4+3\cdot x^3+4\cdot x^2+11\cdot x+36$$
$$\mathrm{polyRemainder}\left(x^6-4\cdot x^4+2\cdot x^3+7\cdot x^2-3\cdot x+4, x^2-3\cdot x+1\right) \blacktriangleright\ 94\cdot x-32$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

9. Käänteisfunktion derivaatta (12 p.)

Anna esimerkki funktiosta f, jonka käänteisfunktion derivaatalle pätee $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{2}$. Muista perustella, miksi esimerkilläsi on vaadittu ominaisuus.

Ratkaisu.

Esimerkiksi käy funktio $f(x) = 2x$. 4p (yht. 4p)

Pisteytyksestä: Mikä tahansa ehdot täyttävä funktio käy vastaukseksi.

PERUSTELUVAIHTOEHTO 1

Funktio f on aidosti monotoninen, joten sillä on olemassa käänteisfunktio. Funktion f käänteisfunktion f^{-1} lauseke on $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ 2p (yht. 6p), sillä

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x.$$ 2p (yht. 8p)

Funktion f käänteisfunktion f^{-1} derivaatta on

$$(f^{-1})'(x) = \mathrm{D}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

kaikkialla, joten myös

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}.$$ 4p (yht. 12p)

PERUSTELUVAIHTOEHTO 2

Funktio f on aidosti monotoninen, joten sillä on olemassa käänteisfunktio. Funktion f käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdassa 2 on käänteisfunktion derivaatan kaavalla

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{2},$$ 6p (yht. 10p)

sillä funktion f derivaatta on $f'(x) = 2$ kaikilla x. 2p (yht. 12p)

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

10. Suuren luvun logaritmi (12 p.)

Luvun $a = 1234\dots9101112\dots99100101\dots998999$ kymmenjärjestelmäesitys saadaan kirjoittamalla luvut 1, 2, 3,…,998 ja 999 peräkkäin.

1. Millä kokonaisluvulla k pätee $a \approx 1{,}23 \cdot 10^k$? (3 p.)

2. Määritä luvun $\ln a$ kokonaisosa. (9 p.)

Ratkaisu.

1. Lasketaan suuren luvun a numeroiden lukumäärä. Luvuissa 1–999 on 9 kpl yksinumeroisia lukuja, $99 - 9 = 90$ kpl kaksinumeroisia lukuja ja $999 - 90 - 9 = 900$ kpl kolminumeroisia lukuja. Luku a saadaan kirjoittamalla luvut 1–999 peräkkäin, joten luvun a numeroiden lukumäärä on

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889. \quad \boxed{\text{2p (yht. 2p)}}$$

Kun kokonaisluku $k \geq 2$, luvussa $1{,}23 \cdot 10^k$ on $k + 1$ numeroa. Näin ollen

$$a \approx 1{,}23 \cdot 10^k,$$

kun

$$\begin{aligned} k + 1 &= 2889 \\ k &= 2888. \quad \boxed{\text{1p (yht. 3p)}} \end{aligned}$$

Vastaus: $k = 2888$.

2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Kohdan 1 nojalla

$$1{,}23\cdot 10^{2888} < a < 1{,}24\cdot 10^{2888} \quad \boxed{\text{4p (yht. 7p)}}$$
$$\ln(1{,}23\cdot 10^{2888}) < \ln(a) < \ln(1{,}24\cdot 10^{2888})$$
$$\ln(1{,}23)+\ln(10^{2888}) < \ln(a) < \ln(1{,}24)+\ln(10^{2888})$$
$$\ln(1{,}23)+2888\ln(10) < \ln(a) < \ln(1{,}24)+2888\ln(10)$$
$$6650{,}07\ldots < \ln(a) < 6650{,}08\ldots. \quad \boxed{\text{3p (yht. 10p)}}$$

Näin ollen suuren luvun a kokonaislukuosa on 6650. $\boxed{\text{2p (yht. 12p)}}$

Vastaus: Luvun a kokonaislukuosa on 6650.

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Kohdan 1 nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}\ln(a) &= \ln\left(1{,}234\ldots\cdot 10^{2888}\right) \quad \boxed{\text{2p (yht. 5p)}}\\ &= \ln(1{,}234\ldots)+\ln\left(10^{2888}\right)\\ &= \ln(1{,}234\ldots)+2888\cdot\ln(10)\\ &= \ln(1{,}234\ldots)+6649{,}865\ldots \quad \boxed{\text{3p (yht. 8p)}}\end{aligned}$$

Luonnollinen logaritmi on aidosti kasvava, joten

$$\ln(a) > \ln(1{,}23)+6649{,}865\ldots = 6650{,}07\ldots \quad \boxed{\text{1p (yht. 9p)}}$$

ja

$$\ln(a) < \ln(1{,}24)+6649{,}865\ldots = 6650{,}08\ldots. \quad \boxed{\text{1p (yht. 10p)}}$$

Näin ollen suuren luvun a kokonaislukuosa on 6650. $\boxed{\text{2p (yht. 12p)}}$

Vastaus: Luvun a kokonaislukuosa on 6650.

11. Lukujono (12 p.)

Olkoon $a_1 = \sqrt{2}$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, kun $n \geq 1$.

1. Osoita induktiolla, että jono (a_n) on kasvava. (4 p.)
2. Osoita induktiolla, että $a_n < 2$ kaikilla $n \geq 1$. (4 p.)
3. Määritä lausekkeen
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$
arvo tulkitsemalla se jonon (a_n) raja-arvoksi. (4 p.)

Ratkaisu.

1. Väite: $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 1$.

   Tutkitaan ensin tapaus $n = 1$. $a_1 = \sqrt{2}$, joten
$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1.$$

   Väite on siis tosi tapauksessa $n = 1$. 1p (yht. 1p)

   Induktio-oletus: $a_{n+1} \geq a_n$. 1p (yht. 2p)

   Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa väite $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \geq \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}. \quad \text{2p (yht. 4p)} \quad \square$$

2. Väite: $a_n < 2$ kaikilla $n \geq 1$.

   Tutkitaan ensin tapaus $n = 1$.
$$2 < 4$$
$$\sqrt{2} < \sqrt{4}$$
$$a_1 < 2.$$

Väite on siis tosi tapauksessa $n = 1$. 1p (yht. 5p)

Pisteytyksestä: Alkuaskeleessa riittää todeta, että $\sqrt{2} < 2$.

Induktio-oletus: $a_n < 2$. 1p (yht. 6p)

Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa väite $a_{n+1} < 2$.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2. \quad \text{2p (yht. 8p)} \quad \square$$

3. Lausekkeen

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

arvo on sama kuin raja-arvo

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Kohtien 1. ja 2. nojalla lukujono (a_n) on kasvava ja rajoitettu, joten se suppenee kohti tätä raja-arvoa. Näin ollen kun $n \to \infty$, $a_{n+1} \to a$ ja $a_n \to a$. 1p (yht. 9p)

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2 + a_n}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_{n \to \infty} a_n}$$

$$a = \sqrt{2 + a} \quad \text{2p (yht. 11p)}$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-ohjelmalla:

$$a = 2.$$

Saadaan siis

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2. \quad \text{1p (yht. 12p)}$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

12. Geometrisen keskiarvon todennäköisyyksiä (12 p.)

Kahden positiivisen luvun a ja b *geometrinen keskiarvo* on $\sqrt{ab}$.

1. Anna esimerkki välin 2–100 kahdesta eri kokonaisluvusta a ja b, joille $\sqrt{ab}$ on kokonaisluku. (3 p.)

2. Satunnaislukugeneraattori arpoo toisistaan riippumatta kaksi kokonaislukua väliltä 1–100 niin, että jokaisen luvun todennäköisyys on $\frac{1}{100}$. Mikä on todennäköisyys sille, että arvottujen lukujen geometrinen keskiarvo on kokonaisluku? Voit laskea tapahtuman klassisen todennäköisyyden tarkasti tai esittää sille simulointiin perustuvan arvion. (9 p.)

Ratkaisu.

1. Esimerkiksi luvut $a = 2$ ja $b = 8$. 2p (yht. 2p)

   Niiden geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{ab} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$ 1p (yht. 3p)

   Tähän käy vastaukseksi mitkä tahansa kaksi eri kokonaislukua väliltä 2–100, joille ehto pätee.

2.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1: TARKKA ARVO

   Merkitään luvun a mahdolliset arvot 1–100 taulukkolaskennan sarakkeeseen A riveille 2–101 ja luvun b mahdolliset arvot riville 1 sarakkeisiin 2–101. siten, että kutakin solua sarakkeissa 2–101 ja riveillä 2–101 vastaa tietty a:n arvo ja tietty b:n arvo.

	1	2	3	4	5	6	
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							

Lasketaan kuhunkin soluun solua vastaavien a:n ja b:n geometrinen keskiarvo.

	1	2	3	4	5	6	
1	1	1.414213562	1.732050808	2	2.236067977	2.449489743	2.64575
2	1.414213562	2	2.449489743	2.828427125	3.16227766	3.464101615	3.74165
3	1.732050808	2.449489743	3	3.464101615	3.872983346	4.242640687	4.58257
4	2	2.828427125	3.464101615	4	4.472135955	4.898979486	5.29150
5	2.236067977	3.16227766	3.872983346	4.472135955	5	5.477225575	5.91607
6	2.449489743	3.464101615	4.242640687	4.898979486	5.477225575	6	6.48074
7	2.645751311	3.741657387	4.582575695	5.291502622	5.916079783	6.480740698	
8	2.828427125	4	4.898979486	5.656854249	6.32455532	6.92820323	7.48331
9	3	4.242640687	5.196152423	6	6.708203932	7.348469228	7.93725
10	3.16227766	4.472135955	5.477225575	6.32455532	7.071067812	7.745966692	8.36660
11	3.31662479	4.69041576	5.744562647	6.633249581	7.416198487	8.124038405	8.77496
12	3.464101615	4.898979486	6	6.92820323	7.745966692	8.485281374	9.1651
13	3.605551275	5.099019514	6.244997998	7.211102551	8.062257748	8.831760866	9.53939
14	3.741657387	5.291502622	6.480740698	7.483314774	8.366600265	9.16515139	9.89949
15	3.872983346	5.477225575	6.708203932	7.745966692	8.660254038	9.486832981	10.2469
16	4	5.656854249	6.92820323	8	8.94427191	9.797958971	10.5830
17	4.123105626	5.830951895	7.141428429	8.246211251	9.219544457	10.09950494	10.9087
18	4.242640687	6	7.348469228	8.485281374	9.486832981	10.39230485	11.2249

2p (yht. 5p)

Tämän voi tehdä kirjoittamalla soluun B2 kaavan

NELIÖJUURI($A2*B$1)

ja kopioimalla tämän kaavan kuhunkin soluun riveillä 2–101 ja sarakkeilla 2–101.

Lasketaan ahkerasti ja huolellisesti käsin, kuinka monessa solussa on kokonaisluku. Tulokseksi saadaan 310. 6p (yht. 11p)

Näin ollen sellaisia lukupareja a ja b, joiden geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, on 310 kappaletta. Kaikkiaan lukupareja on $100^2 = 10000$ kappaletta, ja kunkin lukuparin todennäköisyys on sama, joten todennäköisyys, että satunnaislukugeneraattorin väliltä 1–100 arpomien lukujen a ja b geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, on

$$P = \frac{310}{10000} = 0{,}031 = 3{,}1\%.$$ 1p (yht. 12p)

Ratkaisuvaihtoehto 2: Tarkka arvo

Tehdään ratkaisu täsmälleen kuten vaihtoehdossa 1, mutta käsin laskemisen sijaan lasketaan niiden geometristen keskiarvojen lukumäärä, jotka ovat kokonaislukuja, seuraavasti:

Tehdään uusi yhtä suuri taulukko edellisen taulukon alle, ja merkitään JOS-funktion avulla sen soluihin 1, jos yllä olevan taulukon vastaavassa solussa on kokonaisluku ja 0, jos yllä olevan vastaavan taulukon solussa ei ole kokonaislukua.

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	1	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0

2p (yht. 7p)

Tämän voi tehdä alla olevan kaavan avulla. Esimerkkikaavassa C2 viittaa siihen soluun, jossa tutkittava, mahdollinen kokonaisluku on.

=JOS(C2=PYÖRISTÄ.DES.ALAS(C2);1;0)

ja kopioimalla tämä kaava kuhunkin uuden taulukon soluun.

Nyt niiden lukuparien a ja b lukumäärä, joiden geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, saadaan laskemalla summa kaikista tämän uuden taulukon soluista. Tämän voi tehdä SUMMA-funktiolla. Tässä ratkaisussa käytetyn taulukon tapauksessa kaava on

=SUMMA(B104:CW203)

2p (yht. 9p)

Tulokseksi saadaan 310. 2p (yht. 11p)

Näin ollen sellaisia lukupareja a ja b, joiden geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, on 310 kappaletta. Kaikkiaan lukupareja on $100^2 = 10000$ kappaletta, ja kunkin lukuparin todennäköisyys on sama, joten todennäköisyys, että satunnaislukugeneraattorin väliltä 1–100 arpomien lukujen a ja b geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, on

$$P = \frac{310}{10000} = 0{,}031 = 3{,}1\%.$$ 1p (yht. 12p)

Ratkaisuvaihtoehto 3: Tarkka arvo

Merkitään luvun a mahdolliset arvot 1–100 taulukkolaskennan sarakkeeseen A riveille 2–101 ja luvun b mahdolliset arvot riville 1 sarakkeisiin 2–101. siten, että kutakin solua sarakkeissa 2–101 ja riveillä 2–101 vastaa tietty a:n arvo ja tietty b:n arvo.

	1	2	3	4	5	6	
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

Lasketaan kuhunkin soluun solua vastaavien a:n ja b:n geometrinen keskiarvo miinus solua vastaavien a:n ja b:n geometrinen keskiarvo pyöristettynä alaspäin kokonaisluvuksi. Tällöin niiden solujen kohdalle, joita vastaavien lukujen a ja b geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, tulee nolla ja muiden solujen kohdalle tulee jokin nollasta poikkeava desimaaliluku.

	1	2	3	4	5	6	
1	0	0.414213562	0.732050808	0	0.236067977	0.449489743	0.6457
2	0.414213562	0	0.449489743	0.828427125	0.16227766	0.464101615	0.7416
3	0.732050808	0.449489743	0	0.464101615	0.872983346	0.242640687	0.5825
4	0	0.828427125	0.464101615	0	0.472135955	0.898979486	0.2915
5	0.236067977	0.16227766	0.872983346	0.472135955	0	0.477225575	0.9160
6	0.449489743	0.464101615	0.242640687	0.898979486	0.477225575	0	0.4807
7	0.645751311	0.741657387	0.582575695	0.291502622	0.916079783	0.480740698	
8	0.828427125	0	0.898979486	0.656854249	0.32455532	0.92820323	0.4833
9	0	0.242640687	0.196152423	0	0.708203932	0.348469228	0.9372
10	0.16227766	0.472135955	0.477225575	0.32455532	0.071067812	0.745966692	0.3666
11	0.31662479	0.69041576	0.744562647	0.633249581	0.416198487	0.124038405	0.7749
12	0.464101615	0.898979486	0	0.92820323	0.745966692	0.485281374	0.165
13	0.605551275	0.099019514	0.244997998	0.211102551	0.062257748	0.831760866	0.5393
14	0.741657387	0.291502622	0.480740698	0.483314774	0.366600265	0.16515139	0.8994
15	0.872983346	0.477225575	0.708203932	0.745966692	0.660254038	0.486832981	0.2469
16	0	0.656854249	0.92820323	0	0.94427191	0.797958971	0.5830
17	0.123105626	0.830951895	0.141428429	0.246211251	0.219544457	0.099504938	0.9087
18	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

4p (yht. 7p)

Tämän voi tehdä kirjoitamalla soluun B2 kaavan

=NELIÖJUURI($A2*B$1)-PYÖRISTÄ.DES.ALAS(NELIÖJUURI($A2*B$1)) ja kopioimalla tämän kaavan kuhunkin soluun riveillä 2–101 ja sarakkeilla 2–101.

Nollien määrä näissä soluissa voidaan laskea kaavalla

=LASKE.JOS(B2:CW101;0)

2p (yht. 9p)

Tulokseksi saadaan, että nollia on soluissa yhteensä 310 kappaletta. 2p (yht. 11p)

Näin ollen sellaisia lukupareja a ja b, joiden geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, on 310 kappaletta. Kaikkiaan lukupareja on $100^2 = 10000$ kappaletta, ja kunkin lukuparin todennäköisyys on sama, joten todennäköisyys, että satunnaislukugeneraattorin väliltä 1–100 arpomien lukujen a ja b geometrinen keskiarvo on kokonaisluku, on

$$P = \frac{310}{10000} = 0{,}031 = 3{,}1\%.$$ 1p (yht. 12p)

Ratkaisuvaihtoehto 4: Simulaatio

Arvioidaan kysytty todennäköisyys simulaation avulla. Arvotaan taulukkolaskennan avulla sarakkeisiin A ja B suuri määrä (tässä ratkaisussa 200000) kokonaislukupareja väliltä 1–100. Sarakkeen A luvut vastaavat tehtävän lukua a ja sarakkeen B luvut tehtävän lukua b. Tämän voi tehdä kaavalla

SATUNNAISLUKU.VÄLILTÄ(1;100)

a	b
56	14
75	88
17	65
2	20
84	99
35	65
54	50
58	22
54	79
51	100
80	57
88	2
26	88
78	80
30	50
68	86
75	58
92	44
80	53
10	65
5	4

2p (yht. 5p)

Lasketaan sarakkeeseen C arvottujen lukujen a ja b geometrinen keskiarvo kullakin rivillä. Tämän voi tehdä kirjoittamalla soluun C2 kaavan

=NELIÖJUURI(A2*B2)

ja kopioimalla kaavan kuhunkin sarakkeen C soluun, joiden rivillä on sarakkeissa A ja B arvotut luvut.

a	b	geometrinen keskiarvo
56	14	28
75	88	81.2403840463596
17	65	33.2415402771893
74	20	38.4707681233427
60	99	77.0713954719908
98	65	79.8122797569397
54	50	51.9615242270663
58	22	35.7211421989835
54	79	65.3146231712317
51	100	71.4142842854285
80	57	67.5277720645365
32	2	8
26	88	47.8330429724056
78	80	78.99367063252‌6
30	50	38.7298334620742
68	86	76.4722171772206
75	58	65.9545297913646
92	44	63.6238948823475

Merkitään sarakkeen D soluun luku 1, jos viereinen sarakkeeseen C laskettu geometrinen keskiarvo on kokonaisluku ja 0, jos se ei ole kokonaisluku.

a	b	geometrinen keskiarvo	Onko kokonaisluku
56	14	28	1
75	88	81.2403840463596	0
17	65	33.2415402771893	0
74	20	38.4707681233427	0
60	99	77.0713954719908	0
98	65	79.8122797569397	0
54	50	51.9615242270663	0
58	22	35.7211421989835	0
54	79	65.3146231712317	0
51	100	71.4142842854285	0
80	57	67.5277720645365	0
32	2	8	1
26	88	47.8330429724056	0
78	80	78.993670632526	0
30	50	38.7298334620742	0
68	86	76.4722171772206	0
75	58	65.9545297913646	0
92	44	63.6238948823475	0

2p (yht. 7p)

Tämän voi tehdä alla olevan kaavan avulla. Esimerkkikaavassa C2 viittaa siihen soluun, jossa tutkittava, mahdollinen kokonaisluku on.

=JOS(C2=PYÖRISTÄ.DES.ALAS(C2);1;0)

Lasketaan, kuinka monessa tapauksessa (kuinka monella rivillä) geometrinen keskiarvo oli kokonaisluku. Tämän voi tehdä laskemalla summan sarakkeen D luvuista. Tässä ratkaisussa käytetyssä taulukossa kaava oli

=SUMMA(D2:D200000)

Tulokseksi saadaan, että 200000:sta kokonaislukuparista yhteensä 6223:n tapauksessa geometrinen keskiarvo oli kokonaisluku, eli simulaation tuloksena saadaan arvioksi tehtävässä kysytylle todennäköisyydelle

$$P = \frac{6223}{200000} \quad \boxed{\text{2p (yht. 11p)}}$$

$$= 0{,}031115 \approx 3{,}1\%. \quad \boxed{\text{1p (yht. 12p)}}$$

Pisteytyksestä:

- Arvottu vähintään 500 kokonaislukuparia, joissa luvut välillä 1-100 = 2 p.
- Huomautus: Määrä 500 on otettu YTL:n hyvän vastauksen piirteistä (luettu 18.3.2020). Näin ollen sitä kannattaa käyttää rajana täysille pisteille. 500 lukuparia on kuitenkin ilmiselvästi liian vähän. 500 lukuparin otoskoolla voi hyvin todennäköisesti saada mitä tahansa tuloksia 2–5 prosentin väliltä ja isompikaan vaihtelu ei ole kovin harvinaista. Opiskelijan pitäisi valita jokin tietty otoskoko ja kokeilla arpoa satunnaisluvut uudestaan useita kertoja peräkkäin (Libre Office Calcissa se onnistuu uudelleenlaskennan avulla F9-näppäimellä.) Jos tulokset vaihtelevat liikaa, tulisi otoskokoa, eli lukuparien määrää kasvattaa. 10000 lukuparilla ja muutamalla uudelleenlaskennalla voisi uskaltaa hyvällä varmuudella vastata, että todennäköisyys on noin 3 %. 200000 lukuparilla ja muutamalla uudelleenlaskennalla voisi uskaltaa sanoa, että todennäköisyys on 3,1%. Tämän täsmällisempää tapaa virheen arvioimiseksi tuskin on mielekästä lukiossa käyttää. Toisaalta täytyy sanoa, että tämäkin tapa edellyttää aika paljon erikoisosaamista taulukkolaskennan käytöstä. Pelkästään se, että laatii 10000 rivin taulukon vaatii paljon taitoa.

- Tulos on välillä $[0{,}025; 0{,}037]$ = 1 p.
- Huomautus 1: YTL:n hyvän vastauksen piirteissä oli annettu vastaukselle sallittu väli $[0{,}025; 0{,}035]$. Nostimme ylärajaa siten, että välistä tuli symmetrinen oikean vastauksen suhteen, joka on $0{,}031$. YTL:n antama väli perustui todennäköisesti heidän vastaukseensa $0{,}0301$, joka on virheellinen.
- Huomautus 2: Hyväksytyllä 500 lukuparin otoskoolla on aika lailla tuurista kiinni osuuko tulos tälle välille. Sen takia olisikin tärkeää arpoa luvut muutaman kerran uudestaan ja katsoa, kuinka paljon tulokset vaihtelevat eri laskentakerroilla.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.

13. Trigonometrisiä epäyhtälöitä (12 p.)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan funktioita

$$f(x) = \sin\left(\tfrac{x}{n}\right) \quad \text{ja} \quad g(x) = n\cos x.$$

Osoita, että yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisulle $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pätee $g'(x_0) < -n + 1$.

Ratkaisu.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$g(x) = n\cos(x).$$

Olkoon $x = x_0$ yhtälön

$$f(x) = g(x)$$

ratkaisu ja $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Kyseisellä välillä pätee

$$0 \leq f(x) \leq 1$$
$$0 \leq g(x). \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Tarkastellaan yhtälöä

$$f(x_0) = g(x_0)$$
$$\sin\left(\frac{x_0}{n}\right) = n\cos(x_0) \quad \text{1p (yht. 2p)}$$
$$\sin^2\left(\frac{x_0}{n}\right) = n^2\cos^2(x_0) \qquad (1)$$

Trigonometrian perusyhtälöstä saadaan

$$\sin^2(x_0) + \cos^2(x_0) = 1$$
$$\cos^2(x_0) = 1 - \sin^2(x_0) \qquad (2)$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\sin^2\left(\frac{x_0}{n}\right) = n^2 \cdot (1 - \sin^2(x_0)) \quad \text{2p (yht. 4p)}$$

Tiedetään, että $\sin^2\left(\frac{x_0}{n}\right) \leq 1$, joten saadaan

$$\begin{aligned}
n^2(1 - \sin^2(x_0)) &\leq 1 \quad \| : n^2 \\
1 - \sin^2(x_0) &\leq \frac{1}{n^2} \\
\sin^2(x_0) &\geq 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{2p (yht. 6p)} \\
\sin(x_0) &\geq \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}} \\
&> \sqrt{\frac{(n-1)(n-1)}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \\
&= \frac{n-1}{n}. \quad \text{2p (yht. 8p)}
\end{aligned}$$

Saadaan siis:

$$\begin{aligned}
\sin(x_0) &> \frac{n-1}{n} \quad \| \cdot n \\
n\sin(x_0) &> n - 1 \quad \| \cdot (-1) \quad \text{(suunta muuttuu)} \\
-n\sin(x_0) &< -n + 1. \quad \text{2p (yht. 10p)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Toisaalta

$$g'(x_0) = -n\sin(x_0). \quad \text{2p (yht. 12p)}$$

Näin ollen epäyhtälön (3) nojalla

$$g'(x_0) < -n + 1. \quad \square$$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$g(x) = n\cos(x).$$

Olkoon $x = x_0$ yhtälön

$$f(x) = g(x)$$

ratkaisu ja $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Kyseisellä välillä pätee

$$0 \leq f(x) \leq 1$$
$$0 \leq g(x). \quad \text{1p (yht. 1p)}$$

Koska x_0 on yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisu, täytyy siis olla myös $g(x_0) \leq 1$. 1p (yht. 2p)
Tästä saadaan

$$g(x_0) \leq 1$$
$$n\cos(x_0) \leq 1 \quad \| : n$$
$$\cos(x_0) \leq \frac{1}{n} \quad \text{2p (yht. 4p)}$$
$$\cos^2(x_0) \leq \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

Trigonometrian peruskaavalla saadaan

$$\sin^2(x_0) + \cos^2(x_0) = 1$$
$$\sin^2(x_0) = 1 - \cos^2(x_0)$$

Epäyhtälön (1) nojalla:

$$\sin^2(x_0) \geq 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{2p (yht. 6p)}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x_0) &\geq \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}} \\
&> \sqrt{\frac{(n-1)(n-1)}{n^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \\
&= \frac{n-1}{n}. \quad \text{2p (yht. 8p)}
\end{aligned}$$

Saadaan siis:

$$\begin{aligned}
\sin(x_0) &> \frac{n-1}{n} \quad \| \cdot n \\
n\sin(x_0) &> n - 1 \quad \| \cdot (-1) \quad \text{(suunta muuttuu)} \\
-n\sin(x_0) &< -n + 1. \quad \text{2p (yht. 10p)}
\end{aligned} \tag{2}$$

Toisaalta

$$g'(x_0) = -n\sin(x_0). \quad \text{2p (yht. 12p)}$$

Näin ollen epäyhtälön (2) nojalla

$$g'(x_0) < -n + 1. \quad \square$$

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita ratkaisussa.