YO - Syksy 2010 (29.9.2010) RATKAISUT

1. a) $(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
$= \underline{4ab}$

b) $\tan x = \sqrt{3}$

$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\pi}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$M_f: x \neq -1$ $\quad f'(-3) = \dfrac{(-3)^2+2\cdot(-3)}{(-3+1)^2} = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$

2. a) $x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$
$x\sqrt{7} - 4x \leq 3$
$(\sqrt{7}-4)x \leq 3 \quad \| : \sqrt{7}-4 \approx -1{,}35 < 0$!!

$\underline{\underline{x \geq \dfrac{3}{\sqrt{7}-4}}}$

$x \geq \dfrac{3(\sqrt{7}+4)}{(\sqrt{7}-4)(\sqrt{7}+4)} = \dfrac{3(\sqrt{7}+4)}{7-16} = \dfrac{\cancel{3}^{1}(\sqrt{7}+4)}{-\cancel{9}_{3}}$

$\underline{\underline{x \geq -\frac{1}{3}(\sqrt{7}+4)}}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

$= \Big/_0^1 \ln|x+1|$

$= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0}$

$= \underline{\ln 2}$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Merkitään $t = x^2$.

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$t = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} < \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}$

$\Rightarrow x^2 = -1$ tai $x^2 = 4$
ei ratk. $\quad \underline{\underline{x = -2 \text{ tai } x = 2}}$

3. a) $\overline{OP} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k} + t(2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + s\bar{k}), \quad t \in \mathbb{R}$
$= x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$

$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + st \end{cases}$ Suora on tasossa $3x + 4y + 5z = 21$, kun koordinaatit toteuttavat tason yhtälön.

$\Rightarrow 3(1+2t) + 4(2+t) + 5(2+st) = 21$
$3 + 6t + 8 + 4t + 10 + 5st = 21$
$(6 + 4 + 5s)t = 0$

$t = 0$ tai $\underline{\underline{s = -2}}$ $\quad$ Vast: Suora on tasossa, kun $s = -2$.

b) $f(x) = (2-x)^3$

$F(x) = \int (2-x)^3\,dx = -\int -(2-x)^3\,dx = -\frac{1}{4}(2-x)^4 + C$

$F(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(2-0)^4 + C = 0 \Leftrightarrow \underline{C = 4}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4}(2-x)^4 + 4$

$F(1) = -\frac{1}{4}(2-1)^4 + 4 = -\frac{1}{4} + 4 = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$

4. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = 5 \Leftrightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 5}}$

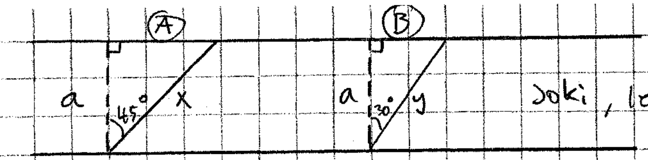
$f(-1) = 12 \Leftrightarrow a - b + 5 = 12 \Leftrightarrow b = a - 7$

$f(2) = -3 \Leftrightarrow 4a + (a-7)\cdot 2 + 5 = -3$

$4a + 2a - 14 + 5 = -3$
$\underline{a = 1}$ $\quad \Rightarrow b = 1 - 7 = -6$

$a + b + c = 1 - 6 + 5$
$= \underline{\underline{0}}$

5.



Joki, leveys = a (km)

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{x} \qquad\qquad \cos 30^\circ = \frac{a}{y}$$

$$x = \frac{a}{\cos 45^\circ} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad\qquad y = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x = \sqrt{2}\,a \text{ (km)} \qquad\qquad y = \frac{2}{\sqrt{3}}a \text{ (km)}$$

$$\text{Aika}_A = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} = \frac{\sqrt{2}\,a \text{ km}}{16 \text{ km/h}} = \frac{\sqrt{2}}{16}a \text{ (h)} \approx 0{,}0884a \text{ (h)}$$

$$\text{Aika}_B = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ km}}{14 \text{ km/h}} = \frac{2a}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{7\sqrt{3}}a \text{ (h)} \approx 0{,}0825a \text{ (h)}$$

$$0{,}0884a \text{ (h)} > 0{,}0825a \text{ (h)}$$

Vast: Veneen B käyttämä aika on pienempi, B ensin perillä.

6.

P(Läpäisee testin) = P(Ainakin 5 oikein loppuista 15:sta)

= 1 − P(Korkeintaan 4 oikein 15:sta)

= 1 − P(0, 1, 2, 3 tai 4 oikein 15:sta)

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \ldots + \binom{15}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\cdot(1 + 15 + 105 + 455 + 1365)$$

$$\approx 0{,}9408$$

Vast: Läpäisee testin n. 94,1 %:n tn:llä.

7.

$$f(x) = \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$\cos x$:n jakso 2π
$\cos 2x$:n jakso π
} Riittää tarkastella väliä $[0, 2\pi]$.

$$f'(x) = -\sin x - \tfrac{1}{2}\cdot(-2\sin 2x) = \sin 2x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \qquad \sin x = \sin 2x$$

$$x = 2x + n\cdot 2\pi \quad \text{TAI} \quad x = \pi - 2x + n\cdot 2\pi$$

$$-x = n\cdot 2\pi \qquad\qquad 3x = \pi + n\cdot 2\pi \quad \| :3$$

$$x = (-)n\cdot 2\pi, \; n \in \mathbb{Z} \qquad\qquad x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\frac{2\pi}{3}, \; n \in \mathbb{Z}$$

f(x) on jatkuva funktio ja siten se saa pienimmän/suurimman arvonsa joko tarkasteluvälin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Välille $[0, 2\pi]$ kuuluvat derivaatan nollakohdat $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ ja $x = \frac{5\pi}{3}$.

$$f(0) = \cos(0) - \tfrac{1}{2}\cos(2\cdot 0) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$f(2\pi) = \tfrac{1}{2} \qquad f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{3}{4} \text{ (S.A.)}$$

$$f(\pi) = -1 - \tfrac{1}{2}\cdot 1 = -\tfrac{3}{2} \text{ (P.A.)} \qquad f\left(\tfrac{5\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{3}{4} \text{ (S.A.)}$$

Pienin arvo on $-\frac{3}{2}$. Suurin arvo on $\frac{3}{4}$.

Suurin arvo saavutetaan kohdissa $x = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$ ja $x = \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

eli pisteissä $\left(\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \frac{3}{4}\right)$ ja $\left(\frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi, \frac{3}{4}\right)$.

8. (a_n) on aritmeettinen jono.

$\Rightarrow$ Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio
ts. $a_{n+1} - a_n = d.$

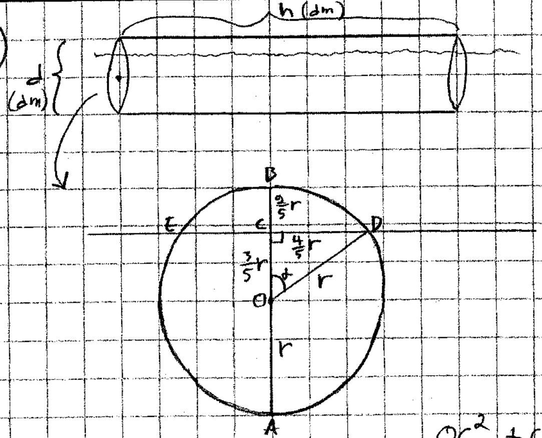
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{a_{n+1}}}{3^{a_n}} = 3^{a_{n+1}-a_n} = 3^d = \text{VAKIO (d oli vakio!)}$$

$\Rightarrow$ Peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, joten
jono (b_n) on Geometrinen jono $\square$

$3^d > 0$. Jono (b_n) on aidosti vähenevä, kun sen suhdeluku $0 < 3^d < 1$. Näin on, kun $d < 0$.

Tällöin $a_{n+1} - a_n = d < 0$ eli $a_{n+1} < a_n$ eli
jono (a_n) on aidosti vähenevä.

9.



Olkoon poikkileikkausympyrän säde r. (dm)

$$BC = \frac{1}{5} \cdot d = \frac{1}{5} \cdot 2r = \frac{2}{5}r.$$

$$OC = r - BC = \frac{3}{5}r.$$

$$OC^2 + CD^2 = r^2$$

$$CD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3}{5}r^2\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{25}r^2} = \frac{4}{5}r$$

Kolmion ODE Ala:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5}r \cdot \frac{3}{5}r = \frac{12}{25}r^2$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}r : r = \frac{3}{5}$$

$$\alpha \approx 53{,}130102°$$

Sektorin [illegible]E Ala:

$$A_2 = \pi r^2 - \frac{2\alpha}{360°}\pi r^2$$
$$= \left(1 - \frac{2\alpha}{360°}\right)\pi r^2$$

Tukin vedenalaisen osan tilavuus (= syrjäytyneen veden tilavuus)

$$V = (A_1 + A_2) \cdot h = \left(\frac{12}{25}r^2 + \left(1 - \frac{2\alpha}{360°}\right)\pi r^2\right)h \quad (dm^3)$$

Syrjäytyneen veden paino = tukin paino = m.

$$m = V \cdot \text{tiheys} = (A_1 + A_2)h \cancel{dm^3} \cdot 1{,}00\, kg/\cancel{dm^3}$$
$$= \left(\frac{12}{25}r^2 + \left(1 - \frac{2\alpha}{360°}\right)\pi r^2\right)h \quad (kg)$$

$$\text{Tukin tiheys} = \frac{m}{\text{koko tilavuus}}$$

$$= \left(\frac{12}{25}r^2 + \left(1 - \frac{2\alpha}{360°}\right)\pi r^2\right)h : \pi r^2 h$$

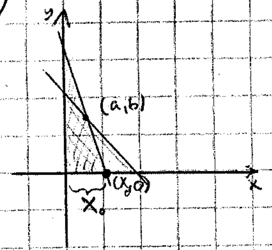
$$= \frac{2{,}694297\ldots \cancel{r^2 h}}{\pi \cancel{r^2 h}}$$

$$\approx 0{,}8576215 \ (kg/dm^3)$$

Vast: Tukin tiheys on n. 0,86 kg/dm^3

10.

Mallikuva



Suoran on oltava laskeva ja $x_0 > a$.

Suoran yhtälö pisteiden $(x_0,0)$ ja (a,b) kautta kulkevalle suoralle:

$$y - 0 = k(x - x_0)$$

$$y = \frac{b-0}{a-x_0}(x-x_0)$$

$$y = \frac{b}{a-x_0}x - \underbrace{\frac{b}{a-x_0}x_0}_{\text{kolmion korkeus}} \qquad (y = kx + b!)$$

Kolmion ala $A(x_0) = \frac{1}{2}x_0 \cdot \left(-\frac{b}{a-x_0}x_0\right)$

$$= -\frac{bx_0^2}{2(a-x_0)}$$

$$A'(x_0) = -\frac{2bx_0 \cdot 2(a-x_0) - bx_0^2 \cdot (-2)}{4(a-x_0)^2}$$

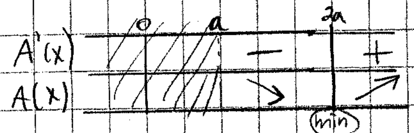
$$= \frac{-4abx_0 + 4bx_0^2 - 2bx_0^2}{4(a-x_0)^2}$$

$$= \frac{2bx_0^2 - 4abx_0}{4(a-x_0)^2}$$

$$A'(x_0) = 0 \iff 2bx_0^2 - 4abx_0 = 0$$

$$2bx_0(x_0 - 2a) = 0 \qquad (\text{Huom } a, b > 0!)$$

$(x_0 = 0)$ mahdoton! tai $x_0 = 2a$



$\lim_{x_0 \to a} A(x) = \lim_{x_0 \to \infty} A(x) = \infty$. A(x) saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa $x_0 = 2a$.

$$A(2a) = -\frac{b(2a)^2}{2(a-2a)} = \frac{b(2a)^{\cancel{2}}}{\cancel{2a}} = 2ab$$

Vast: Kolmion pienin mahdollinen ala $= 2ab$

11.

a)

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ei aina tosi, joten lause A ∨ B ei ole tautologia!

b)

A	B	C	¬B	A ∨ ¬B	C ∨ B	(A ∨ ¬B) ∨ (C ∨ B)
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1

Aina tosi!

Siis lause (A ∨ ¬B) ∨ (C ∨ B)

On tautologia

12. $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + a$ jaollinen $(2x-1)$:llä.

Jos $P(x)$ on jaollinen binomilla $2x-1$, niin binomin nollakohta on myös $P(x)$:n nollakohta.

$2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(\frac{1}{2}) = 0$

$2 \cdot (\frac{1}{2})^4 - 3 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 7 \cdot (\frac{1}{2})^2 + a = 0$

$\frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{7}{4} + a = 0$

$\underline{\underline{a = \frac{16}{8} = 2}} \Rightarrow P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x^2 - 4x - 2 \\
2x-1 & 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 \quad + 2 \\
 & -(2x^4 - x^3) \\
 & -2x^3 - 7x^2 \\
 & -(-2x^3 + x^2) \\
 & -8x^2 \\
 & -(-8x^2 + 4x) \\
 & -4x + 2 \\
 & -4x + 2 \\
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow P(x) = (2x-1)\underbrace{(x^3 - x^2 - 4x - 2)}_{\text{Merkitään } Q(x)}$

Huomataan, että $Q(-1) = 0$ $\left((-1)^3 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 2 = 0\right)$
Näin ollen $x - (-1)$ eli $x+1$ on $Q(x)$:n tekijä

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 2 \\
x+1 & x^3 - x^2 - 4x - 2 \\
 & -(x^3 + x^2) \\
 & -2x^2 - 4x \\
 & -(-2x^2 - 2x) \\
 & -2x - 2 \\
 & -2x - 2 \\
 & 0
\end{array}
$$

Siis $P(x) = 0 \iff (2x-1)(x+1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$2x - 1 = 0 \lor x + 1 = 0 \lor x^2 - 2x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ $\qquad x = -1$ $\qquad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{3}$

Vast. $a = 2$. $P(x) = 0$, kun $x = \frac{1}{2} \lor x = -1 \lor x = 1 - \sqrt{3} \lor x = 1 + \sqrt{3}$.

---

13. $f(x) = \begin{cases} ae^{-3x}, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$

$f(x)$ on tiheysfunktio, kun 1°) $f(x) \geq 0$ 2°) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Ehto 1°) $f(x) \geq 0$, kun $a\underbrace{e^{-3x}}_{>0} \geq 0$, joten oltava $\underline{a > 0}$.

Ehto 2°) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \int_0^{\infty} ae^{-3x}\,dx = 1$

$\lim_{s \to \infty} \int_0^s ae^{-3x}\,dx = 1$

$\lim_{s \to \infty} -\frac{1}{3}a \Big/_0^s e^{-3x} = 1$

$\lim_{s \to \infty} -\frac{1}{3}a(\underbrace{e^{-3s}}_{\to 0, \text{ kun } s \to \infty} - 1) = 1$

$\frac{1}{3}a = 1$

$\underline{a = 3}$ (>0)

Vast. $\underline{a = 3}$.

Kertymäfunktio $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ \int_0^x 3e^{-3x}\,dx, & \text{kun } x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \Big/_0^x -e^{-3x}, & x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0\\ -e^{-3x}-(-1)\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ 1-e^{-3x}, & \text{kun } x\geq 0\end{cases}$$

Mallikuva

$$P(X\geq t)=1-F(t)$$
$$=1-1+e^{-3t}$$
$$=e^{-3t},\quad t\geq 0$$

***14** a) $f(x)=\ln x+x+1,\ x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1>0,\ \text{kun } x>0.$$

$\Rightarrow f(x)$ on aidosti kasvava $\Rightarrow$ käänteisfunktio $g=f^{-1}$ on olem. □

b) $g'(2)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $2=f(x_0)$.

Huomataan, että $f(1)=\ln 1+1+1=2$

$\Rightarrow x_0=1$

$$f'(1)=\frac{1}{1}+1=2$$

$$\Rightarrow g'(2)=\frac{1}{2}$$

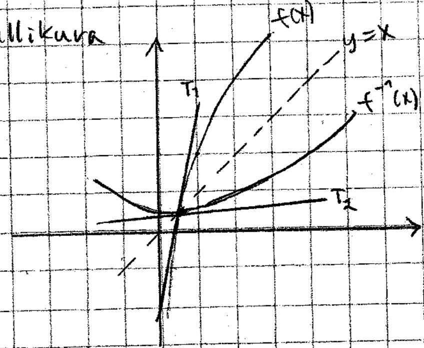
c) funktio ja käänteisfunktio ovat symmetrisiä suoran $y=x$ suhteen, joten ne voivat leikata vain ko. suoralla.

$$\begin{cases}y=x\\ y=f(x)=\ln x+x+1\end{cases}$$

$$x=\ln x+x+1$$
$$\ln x=-1$$
$$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$\Rightarrow f$ ja f^{-1} leikkaavat pisteessä $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

d) Mallikuva



Funktiolle $f(x)$ kohtaan $x=\frac{1}{e}$ piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$f'\left(\tfrac{1}{e}\right)=\frac{1}{\frac{1}{e}}+1=e+1\quad\Rightarrow \text{suuntakulma } \alpha$$

$$\tan\alpha=k=e+1$$

$$\alpha\approx 74{,}94697\ldots^\circ$$

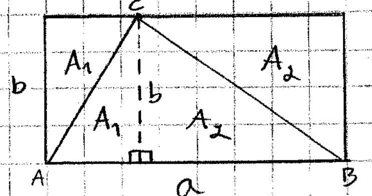
$\Rightarrow$ kuvaajien leikkauskulma on tangenttien T_1 ja T_2 välinen kulma

$$\underbrace{(\alpha-45^\circ)}_{T_1\text{:n ja suoran } y=x \text{ välinen kulma}}\cdot 2=59{,}893\ldots^\circ\approx 59{,}9^\circ$$

15.

a) Tylppäkulmainen kolmio on kolm[io], jonka yksi kulma on $>90°$.

b)

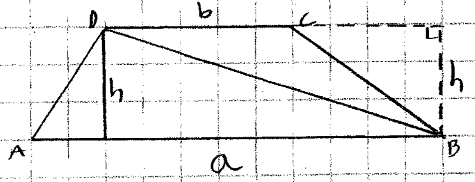


Kolmion sivut AC ja CB jakaa suorakulmiot yhtäsuuriin osiin (A_1 ja A_1) sekä (A_2 ja A_2).

suorakulmion ala

$$\text{Kolmion ala} = A_1 + A_2 = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}ab. \quad \square$$

c)



Puolisuunnikas ABCD.

$$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{BCD}$$

$$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{a+b}{2}h \quad \square$$