YO - Pitkä oppimäärä 28.9.2011

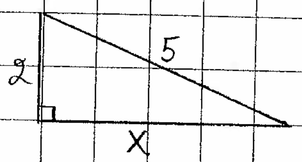
1. a) $3x^2 = -x$

$3x^2 + x = 0$

$x(3x+1) = 0 \quad \| \text{TNS}$

$\underline{\underline{x = 0}}$ tai $\underline{\underline{x = -\frac{1}{3}}}$

b)



$x^2 + 2^2 = 5^2$

$x^2 = 21$

$(x = -\sqrt{21})$ tai $\underline{\underline{x = \sqrt{21}}}$

c) $\frac{{}^{4)}\,4x-1}{5} = \frac{{}^{10)}\,x+1}{2} + \frac{{}^{5)}\,3-x}{4}$

$\frac{16x-4}{20} = \frac{10x+10}{20} + \frac{15-5x}{20} \quad \| \cdot 20$

$16x - 4 = 10x + 10 + 15 - 5x$

$11x = 29$

$\underline{\underline{x = \frac{29}{11}}}$

2. a) $\frac{{}^{\sqrt{2})}\,1}{\sqrt{2}} + \frac{{}^{2-\sqrt{2})}\,1}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} + \frac{2-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4-2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\cancel{\sqrt{2}} + 2 - \cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

b) Leikkauspisteet saadaan yhtälöparilla:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x^2 + (2x)^2 = 1$

$x^2 + 4x^2 = 1$

$5x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{5}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ tai $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow y = 2x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

V: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

c) $f(x) = 2^{-x}$ $\quad f'(x) = 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot D(-x)$

$= -2^{-x} \ln 2$

$f'(1) = -2^{-1} \ln 2 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\ln 2}}$ $(\approx -0{,}35)$

3.

a) $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 4 + \ln 2$

Määrittely: $x+1>0$ ja $x-1>0$ } Mj $x>1$
$x>-1$ ja $x>1$

$$\ln \frac{x+1}{x-1} = \ln(4\cdot 2) \quad || \ \ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 8 \quad || \cdot (x-1) > 0$$

$$x+1 = 8x-8$$
$$-7x = -9$$
$$x = \frac{9}{7} \quad (>1 \text{ ok!})$$

b) $\dfrac{2x+1}{x-1} \geq 3$ Määrittely $x \neq 1$.
$x-1 \neq 0 \rightarrow$

$$\frac{2x+1}{x-1} - \overset{x-1)}{3} \geq 0$$

$$\frac{2x+1-3x+3}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x+4}{x-1} \geq 0$$

$f(0) = \frac{4}{-1} = -4 < 0$
$f(2) = 2 > 0$, $f(5) = -\frac{1}{4} < 0$

$f(x) = \frac{-x+4}{x-1}$

	1		4	
$-$		$+$		$-$

Nollakohdat $-x+4=0$
$x = 4$

V: $1 < x \leq 4$

→

3. JATKUU

c) Pisteen $(3, -2)$ etäisyys suorasta $4x-3y=2 \Leftrightarrow 4x-3y-2=0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4\cdot 3 + (-3)\cdot(-2) + (-2)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$= \frac{|16|}{5} = \frac{16}{5} \quad \left(= 3\tfrac{1}{5}\right)$$

---

4. a) $F_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x>1$

$= (1-x)^{-1}$

$$F_1'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot D(1-x)$$
$$= -(1-x)^{-2} \cdot (-1)$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$$

$F_2(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $x>1$

$$F_2'(x) = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$$

Koska $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ ovat $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ $f(x)$:n integraalifunktioita □

→

4. JATKUU

b) $F_1(x) - F_2(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{1-x}$

$= \dfrac{1-x}{1-x} = \underline{\underline{1}}$

c) $f(x) = \dfrac{1^{\,>0}}{(1-x)^2_{\,>0}} > 0$

$\Rightarrow A = \displaystyle\int_2^5 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

$= \Big/_{2}^{5} \dfrac{1}{1-x} \leftarrow F_1(x)$

$= \dfrac{1}{1-5} - \dfrac{1}{1-2}$

$= -\dfrac{1}{4} - (-1)$

$= \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$

5. $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} - \bar{k}$

$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

$= \dfrac{2\cdot 3 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}}$

$= \dfrac{6}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{14}}$

$= \dfrac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}} \quad \| \cos^{-1}$

$\Rightarrow \measuredangle(\bar{a},\bar{b}) = 57{,}68846\ldots^\circ \approx \underline{\underline{57{,}7^\circ}}$

6. a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \dfrac{2+2}{1} = \underline{\underline{4}}$

b) $\left| \dfrac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < 0{,}01$ Määrittely $x \neq 2$

$\left| \dfrac{x^2-4-4(x-2)}{x-2} \right| < 0{,}01$

$\Rightarrow$

6 b) JATKUU

$$\left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right| < 0{,}01$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{4\pm0}{2}=2 \text{ (kaksoisjuuri!)}$$

$$\left|\frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{x-2}}\right| < 0{,}01$$

$$|x-2| < 0{,}01$$

$$-0{,}01 < x-2 < 0{,}01 \quad \| +2$$

$$1{,}99 < x < 2{,}01 \text{ JA } x \neq 2 \text{ (määrittely!)}$$

7.

Virtausnopeus	Halkaisija^4
a	d^4
$2a$	$(kd)^4$

(k = halkaisijan kasvukerroin)

Suureet ovat suoraan verrannolliset

$$\Rightarrow \frac{\cancel{a}}{2\cancel{a}}=\frac{d^4}{(kd)^4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{\cancel{d^4}}{k^4\cancel{d^4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k^4}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k^4=2$$

$$k=(\pm)\sqrt[4]{2}=1{,}189207\ldots$$

$\Rightarrow$ Halkaisijaa on suurennettava $1{,}189207-1$

$$=0{,}189207$$

$$\approx 18{,}9\,\%$$

8.

a) $P(\text{pelaaja saa 40 pistettä})$

$= P(\text{"vasen" } 40) \text{ tai } P(\text{"oikea" } 40)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$

$= \underline{\underline{\frac{5}{18}}} \quad (\approx 0{,}278)$

b)

Pistemäärä	Vastaava tod.näk.
40	$\frac{5}{18}$ (a-kohdasta!)
30	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
20	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

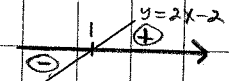
$\Rightarrow$ Pistemäärän odotusarvo

$E(X) = 40 \cdot \frac{5}{18} + 30 \cdot \frac{1}{9} + 20 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{9}$

$= \underline{\underline{25 \text{ pistettä}}}$

9. $f(x) = x^2 - 2x$, $x \geq 1$.

a) $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$, kun $x \geq 1$



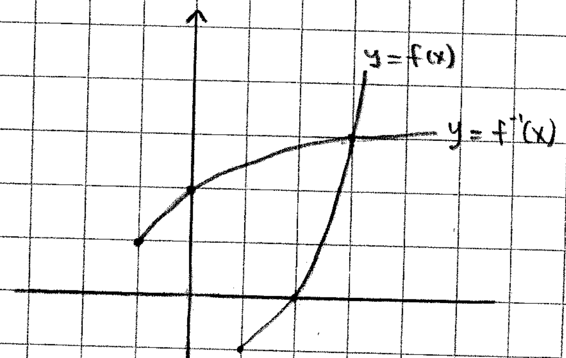
Koska derivaatta $f'(x) > 0$, kun $x > 1$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisessä pisteessä $x = 1$, niin $f(x)$ on aidosti kasvava.

$\Rightarrow$ Käänteisfunktio $f^{-1}(x)$ on olemassa.

b) Merkitään $y = f(x) = x^2 - 2x$.

Neliöksi täydennys
$$x^2 - 2x + 1 = y + 1$$
$$(x-1)^2 = y + 1 \quad \| \sqrt{\ }$$
$$|x - 1| = \pm\sqrt{y+1} \quad \| \ |x-1| \geq 0!$$
$$x - 1 = \sqrt{y+1} \quad \| \ |x-1| = x - 1, \text{ kun } x \geq 1$$
$$x = \sqrt{y+1} + 1$$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \underline{\underline{\sqrt{x+1} + 1}}$, $\underline{\underline{\text{MJ } x \geq -1}}$



$f(1) = -1$
$f(2) = 0$
$f(3) = 3$
$f^{-1}(-1) = 1$
$f^{-1}(0) = 2$
$f^{-1}(3) = 3$

(10) $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2$

Nollakohdat: $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = 0$

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \Rightarrow$ $3\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2 = 0$

$3\cos^2 x + \cos^2 x - 3 = 0$

$4\cos^2 x = 3$

$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad || \sqrt{\ }$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{\underline{x = \pm \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi}}$ tai $\underline{\underline{x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}}}$

$f'(x) = 6\cos x \cdot (-\sin x) - 2\sin x \cdot \cos x$

$= -8\sin x \cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8\sin x \cos x = 0 \quad || \text{TNS!}$

$\sin x = 0$ tai $\cos x = 0$

$x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}.$

Koska f(x) on jaksollinen funktio (jakso 2π), riittää tarkastella esim. väliä $[0, 2\pi]$.

Välille kuuluvat derivaatan nollakohdista $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ ja $x = 2\pi$.

10. JATKUU

f(x) on jatkuva funktio ja saa siten sulj. välillä pienimmän/suurimman arvonsa joko välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = 3\cos^2 0 - \sin^2 0 - 2 = 3 \cdot 1^2 - 0^2 - 2 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 3 \cdot 0^2 - 1^2 - 2 = -3$

$f(\pi) = 3 \cdot (-1)^2 - 0^2 - 2 = 1$

$f(\frac{3\pi}{2}) = 3 \cdot 0^2 - (-1)^2 - 2 = -3$

$f(2\pi) = 3 \cdot 1^2 - 0^2 - 2 = 1$

Vast: Funktion f(x) <u>pienin arvo</u> on $\underline{-3}$

ja <u>suurin arvo</u> on <u>1.</u>

11. $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

a) $\dfrac{n \geq 1}{2n+1 \geq 3}$ } selvästi $a_n > 0$. (I)

Tarkastellaan erotusta $a_n - \frac{1}{2}$

$$\frac{{}^{2)}n}{2n+1} - \frac{{}^{2n+1)}1}{2} = \frac{2n - (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 1}{2(2n+1)}$$

$$= \left.\frac{-1 < 0}{2(2n+1) > 0}\right\} < 0$$

$\Rightarrow a_n - \frac{1}{2} < 0$

$a_n < \frac{1}{2}$ (II)

$\Rightarrow$ kohdat I ja II $\Rightarrow$ $0 < a_n < \frac{1}{2}$. □

b) Tutkitaan erotusta $a_{n+1} - a_n$.

$$\frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} = \frac{{}^{2n+1)}n+1}{2n+3} - \frac{{}^{2n+3)}n}{2n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$\longrightarrow$

11. JATKUU

$$= \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{2n} + \cancel{n} + 1 - \cancel{2n^2} - \cancel{3n}}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \left.\frac{1 > 0}{(2n+3)(2n+1) > 0}\right\} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$

$a_{n+1} > a_n$ □

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(2 + \frac{1}{n})}$$

$\frac{1}{n} \to 0$

$$= \frac{1}{2+0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

12.

a) $f(x) = x^3 - 2x - 5$

$f'(x) = \underline{\underline{3x^2 - 2}}$

b) $f(x) = x^3 - 2x - 5$ on polynomina jatkuva.

$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1 < 0$

$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 16 > 0$

Koska jatkuva funktio saa tarkasteluvälin päätepisteissä erimerkkiset arvot, saa se välillä myös arvon 0. Ts. on olemassa $x_0 \in]2, 3[$, että $f(x_0) = 0$.

c) Newtonin menetelmä $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Ratkaistaan yhtälöä $f(x_n) = 0$:

$x_0 = 2$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{-1}{3 \cdot 2^2 - 2} = 2,1$

$x_2 = 2,1 - \frac{f(2,1)}{f'(2,1)} = 2,1 - \frac{0,061}{11,23} = 2,094568...$

$x_3 = 2,094568... - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,0945514...$

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,09455148154...$

$\approx \underline{\underline{2,0946}}$

(Huom! f ja f' on saatu a-kohd.)

13.

Väite: Luku lg50 ei ole rationaaliluku.

Todistus: Tehdään vastaväite, lg50 on rationaaliluku (ts. $\lg 50 \in \mathbb{Q}$).

$\Rightarrow$ Tällöin on olemassa positiiviset kokonaisluvut m ja n, joilla $\lg 50 = \frac{m}{n}$.

$\lg 50 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 50$ (logaritmin määritelmä!)

$\left(10^{m \cdot \frac{1}{n}}\right) = 50 \quad \| ( )^n$

$10^m = 50^n$

$10^m = 5^n \cdot 10^n \quad \| : 10^n$

$10^{m-n} = 5^n$

$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{(m-n)\text{ kpl.}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n\text{ kpl.}}$

Koska $10 = 2 \cdot 5$, niin yhtälön vasen puoli on parillinen ja oikea puoli pariton (5 on alkuluku).

$\Rightarrow$ Ristiriita!

$\Rightarrow$ Vastaväite on siis väärä ja siten väite tosi $\square$

14.

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax+b)\,dx$

$= \Big/_0^1 \left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right)$

$= \frac{a}{2} + b - 0$

$= \frac{1}{2}a + b$

b) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

$S_1 = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} f\left(\frac{i}{1}\right) = 1 \cdot f\left(\frac{1}{1}\right) = a + b$

$S_2 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + b + a + b\right)$

$= \frac{3}{4}a + b$

$S_3 = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a + b + \frac{2}{3}a + b + a + b\right)$

$= \frac{2}{3}a + b$

$S_4 = \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a + b + \frac{2}{4}a + b + \frac{3}{4}a + b + a + b\right) = \frac{5}{8}a + b$

$\Longrightarrow$

14 jatkuu

$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}a + \frac{2}{n}a + \ldots + \frac{n}{n}a\right) + b$

$= \frac{a}{n^2}\underbrace{\left(1 + 2 + \ldots + n\right)}_{\text{aritmeettinen summa}} + b$

$= \frac{a}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n}\,\frac{1+n}{2} + b = \frac{1+n}{2n}a + b$

$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$

$s_1 = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} f\left(\frac{i-1}{1}\right) = f(0) = a \cdot 0 + b = b$

$s_2 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1-1}{2}\right) + f\left(\frac{2-1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{2}a + b\right) = \frac{1}{4}a + b$

$s_3 = \frac{1}{3}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(b + \frac{1}{3}a + b + \frac{2}{3}a + b\right)$

$= \frac{1}{3}a + b$

$\Longrightarrow$

14 jatkuu

$$r_n = \frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{a}{n^2}\left(\underbrace{1+2+\dots+(n-1)}_{\text{aritmeettinen summa}}\right) + b$$

$$= \frac{a}{n^2}\cdot(n-1)\cdot\frac{1+(n-1)}{2} + b$$

$$= \frac{a(n-1)\cancel{n}}{2n^{\cancel{2}}} + b = \underline{\underline{\frac{n-1}{2n}a + b}}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2n}a + b\right)$$

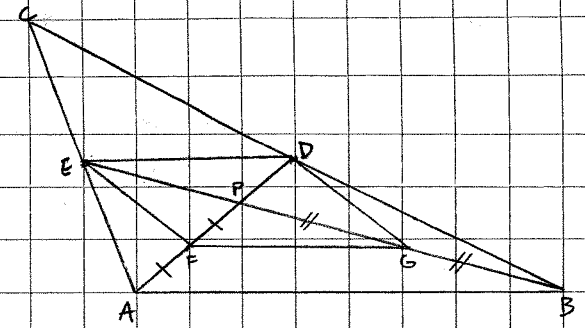
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(\frac{1}{n}+1)}{\cancel{n}\cdot 2}a + b\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}a + b}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - r_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2n}a + b - \left(\frac{n-1}{2n}a + b\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cancel{n}-\cancel{n}+1}{\cancel{2}n}a + \cancel{b} - \cancel{b}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a = 0\cdot a = \underline{\underline{0}}$$

*15.



a) $\overline{FG} = \overline{FP} + \overline{PG} = \frac{1}{2}\overline{AP} + \frac{1}{2}\overline{PB} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overline{AP} + \overline{PB}}_{\overline{AB}}\right)$

$\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ □

b) $\overline{ED} = \overline{EC} + \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

$\Rightarrow \overline{FG} = \overline{ED} \quad (= \frac{1}{2}\overline{AB})$.

Sivut FG ja ED ovat siis yhdensuuntaiset ja yhtäpitkät. Näin ollen FE ja GD ovat myös keskenään yhdensuuntaiset ja yhtäpitkät.

$\Rightarrow$ FGDE on suunnikas □

c) Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa

$\Rightarrow \overline{DP} = \overline{PF} = \overline{FA}$

$= \frac{1}{3}\overline{DA}$ □

d) Kohdan c) perusteella $DP = \frac{1}{3}AD$ ja samoin $\overline{EP} = \frac{1}{3}\overline{EB}$. Koska sillä, mitkä keskijanat valittiin, ei ole väliä, toteutuu lause kaikilla keskijanoilla □