



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (*) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2(1 - 3x + 3x^2) = 3(1 + 2x + 2x^2)$

b) $|x| = 1 + x$

c) $1 - x = \frac{1}{1 - x}$

2. Sievennä lausekkeet

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

b) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$

c) $\ln \frac{x}{2} + \ln \frac{e^x}{x} + \ln 2$

3. a) Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$$

derivaatan arvo kohdassa $x = 0$.

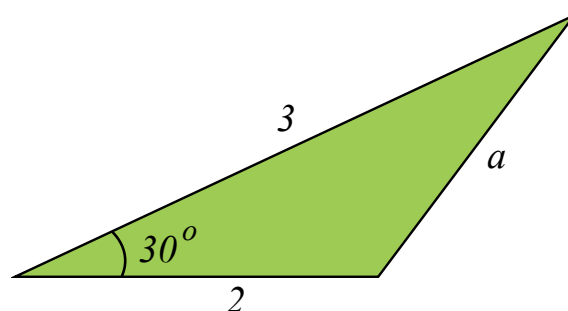
b) Laske integraalin

$$\int_0^{\pi} \left(1 + \sin \frac{x}{3}\right) dx$$

tarkka arvo.

4. a) Olkoon $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ sellainen kulma, että $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Määritä lukujen $\sin \alpha$ ja $\tan \alpha$

tarkat arvot.

b) Laske oheisessa kuvassa olevan kolmion sivun pituuden a tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.


5. Määritä polynomin $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2, 6]$.
6. Laske paraabelin $y^2 = 4x$ ja suoran $4x - 3y = 4$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. Piirrä kuvio.
7. Erään mallin (R. MacArthur & E. O. Wilson, 1967) mukaan saarella pesivien lintulajien lukumäärä n riippuu saaren pinta-alasta A likimain kaavan $n = kA^b$ mukaisesti, missä k ja b ovat saaresta riippumattomia positiivisia vakioita.
- a) Havaintojen perusteella kahdella Kanariansaarella on saatu seuraavat arvot:
- $$n_1 = 20, A_1 = 10,2 \text{ km}^2 \quad (\text{Alegranza}),$$
- $$n_2 = 6, A_2 = 0,0158 \text{ km}^2 \quad (\text{Roque del Oeste}).$$
- Määritä näiden tietojen perusteella vakiot k ja b kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
- b) Arvioi mallin avulla La Palman saarella ($A = 708 \text{ km}^2$) pesivien lintulajien lukumäärää.



Alegranza <<http://www.lanzarote.org/blog/?p=629>>. Luettu 31.3.2011.



Roque del Oeste <<http://www.reptilesdecanariastjorge.com>>. Luettu 31.3.2011.



La Palma <<http://mappery.com/map-of/La-Palma-Physical-Map>>. Luettu 29.3.2011.

8. Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.
- a) Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot?
- b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?
- c) Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo.

9. Olkoot

$$\bar{a} = (\cos \varphi - 2 \sin \varphi) \bar{i} + \bar{j} + (\sin \varphi + 2 \cos \varphi) \bar{k},$$

$$\bar{b} = (\cos \varphi + \sin \varphi) \bar{i} + \bar{j} + (\sin \varphi - \cos \varphi) \bar{k}.$$

- a) Osoita, että vektorit \bar{a} ja \bar{b} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla $\varphi \in \mathbf{R}$.
- b) Olkoon $\varphi = 0$. Onko olemassa sellaisia kertoimia $s, t \in \mathbf{R}$, että $\bar{i} - \bar{j} = s\bar{a} + t\bar{b}$?

10. Tutki, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $e^{x+a} = x$ on vakion $a \in \mathbf{R}$ eri arvoilla.

11. a) Geometrisen jonon kaksi peräkkäistä termiä ovat rationaalilukuja. Osoita, että jonon kaikki termit ovat rationaalilukuja.
- b) Geometrisessa jonossa on ainakin kaksi rationaalista termiä. Osoita, että rationaalisia termejä on äärettömän monta.

12. Erään vuorokauden lämpötilaa $f(t)$ tutkittiin ajan t funktiona mittaamalla lämpötila Celsiusasteina kolmen tunnin välein keskiyöstä alkaen. Tuloksena saatiin seuraava taulukko:

t	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00	24.00
$f(t)$	10,2	10,7	12,3	13,8	15,8	17,9	17,0	15,5	14,2

Arvioi vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt$$

laskemalla siinä esiintyvä integraali puolisuunnikassäännön avulla.

13. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(4x+3) - \ln(3x+4))$.

- *14.** Sijoittaja käytti osakkeen kurssikehityksen arvioimiseen todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktion maksimi saavutetaan markkina-arvolla $20,50$ € ja joka on nolla yli viiden euron poikkeamilla markkina-arvosta $20,50$ €. Tiheysfunktio on jatkuva, ja sen kuvaaja koostuu kahdesta lineaarisesta osasta välillä $15,50$ – $25,50$ €.
- a)** Määritä tiheysfunktion lauseke. (3 p.)
 - b)** Millä todennäköisyydellä osakkeen markkina-arvo on alle 19 €? (2 p.)
 - c)** Muiden kurssien nousu sai sijoittajan muuttamaan jakaumaa epäsymmetriseksi niin, että maksimi saavutettiin edelleen arvolla $20,50$ €, mutta nollakohta $25,50$ € siirtyi pisteeseen $30,50$ €. Muilta ominaisuuksiltaan jakauma pysyi samantyyppisenä kuin aikaisemmin. Määritä tämän uuden jakauman odotusarvo. (4 p.)
- *15.** Suora ympyrälieriö on pallon sisällä niin, että sen molempien pohjien reunat sivuavat pallon pintaa. Pallon pinta-alan suhdetta lieriön koko pinta-alaan merkitään symbolilla t . Lieriön koko pinta-alalla tarkoitetaan sen vaipan ja pohjien yhteenlaskettuja pinta-aloja.
- a)** Määritä lieriön korkeuden suhde lieriön pohjan säteeseen parametrin t avulla lausuttuna. (2 p.)
- Millä parametrin t arvoilla
- b)** tällaista lieriötä ei ole olemassa (2 p.)
 - c)** on täsmälleen yksi tällainen lieriö (3 p.)
 - d)** on kaksi tällaista lieriötä? (2 p.)