MAA YO-S2012, Ratkaisut

1. a) $2(1-3x+3x^2) = 3(1+2x+2x^2)$

$$2-6x+\cancel{6x^2} = 3+6x+\cancel{6x^2}$$

$$-12x = 1$$

$$\underline{\underline{x = -\tfrac{1}{12}}}$$

b) $|x| = 1+x$

$x = 1+x$ tai $x = -(1+x)$

$0 = 1$ epätosi

(Ei ratk.)

$$x = -1-x$$

$$2x = -1$$

$$\underline{\underline{x = -\tfrac{1}{2}}}$$

c) $1-x = \frac{1}{1-x} \quad \| \cdot(1-x)$, Määrittely $1-x \neq 0$

$\underline{x \neq 1}$

$$(1-x)^2 = 1$$

$$1-2x+x^2 = 1$$

$$x^2-2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \quad \| \text{TNS}$$

$$\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 2}}$$

2. a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2$, Määrittely $\underline{x \neq 0}$

$(a^2-b^2 = (a+b)(a-b))$

$$= \left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x\left(\frac{2}{x}\right) = \underline{\underline{4}}$$

b) $\frac{x^2-9}{x+3}$, Määrittely $x \neq -3$

$$= \frac{x^2-3^2}{x+3}$$

$$= \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \underline{\underline{x-3}}$$

c) $\ln\frac{x}{2} + \ln\frac{e^x}{x} + \ln 2$

$$= \cancel{\ln x} - \cancel{\ln 2} + \ln e^x - \cancel{\ln x} + \cancel{\ln 2}$$

$$= \ln e^x$$

$$= x \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = \underline{\underline{x}}$$

3. a) $f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}e^x\cos x$$

$$=e^x\cos x \Rightarrow f'(0)=e^0\cdot\cos 0=1\cdot 1$$

$$\underline{\underline{=1}}$$

b) $\int_0^{\pi}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\int_0^{\pi}1\,dx+3\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}x\right)dx$$

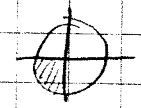
$$=\Big/_0^{\pi}x-3\Big/_0^{\pi}\cos\frac{1}{3}x$$

$$=\pi-0-3\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)$$

$$=\pi-3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 1$$

$$\underline{\underline{=\frac{3}{2}+\pi}}$$

4. a) $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.



$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\underline{\underline{\sin\alpha}}=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\overset{(+)}{-}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$\sin\alpha\leq 0$

$$=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$

$$=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\underline{\underline{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

$$\underline{\underline{\tan\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}:\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{1}$$

$$=\underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

b) $a^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 30^\circ$ (kosinilause!)

$a^2=13-12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2=13-6\sqrt{3}$

$$a=\overset{+}{(-)}\underline{\underline{\sqrt{13-6\sqrt{3}}}}=1{,}6148\ldots\approx\underline{\underline{1{,}61}}$$

(5.) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$, Polynomina jatkuva ja derivoituva.

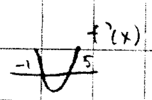
$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 12x - 15 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 18}{6} = \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}$$

Kulkukaavio

	-1	2	5	6
$f'(x)$			−	+
$f(x)$			↘	↗



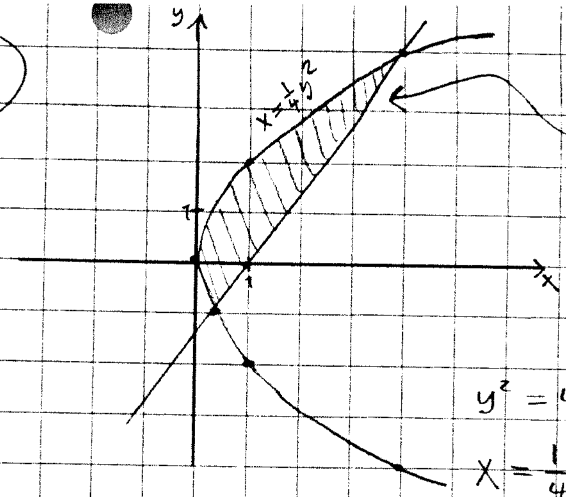
$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 2 = -44$ s.A.

$f(5) = \ldots = -98$ P.A.

$f(6) = \ldots = -88$

Vast: Välillä $[2, 6]$ $f(x)$:n pienin arvo on -98 ja suurin arvo -44.

(6.)



$4x - 3y = 4$

$4x = 3y + 4$

$x = \frac{3}{4}y + 1$

$y^2 = 4x$

$x = \frac{1}{4}y^2$

y	$x = \frac{1}{4}y^2$
± 2	1
± 4	4
0	0

Integroimisrajat käyrien leikkauspisteistä

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y + 1 \\ x = \frac{1}{4}y^2 \end{cases}$$

$\frac{3}{4}y + 1 = \frac{1}{4}y^2 \quad \| \cdot 4$

$y^2 - 3y - 4 = 0$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

Integroitaessa y:n suhteen, on suora ylempänä!

$$A = \int_{-1}^{4} \left(\frac{3}{4}y + 1 - \frac{1}{4}y^2\right) dy$$

$$= \Big/_{-1}^{4} \frac{3}{8}y^2 + y - \frac{1}{12}y^3$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 4^2 + 4 - \frac{1}{12} \cdot 4^3 - \left(\frac{3}{8}(-1)^2 - 1 + \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{14}{3} - \left(-\frac{13}{24}\right) = \underline{\underline{\frac{125}{24}}} = 5{,}20833\ldots \approx \underline{\underline{5{,}21}}$$

7. $n = kA^b$, $k > 0$, $b > 0$.

a) $n_1 = 20$, $A_1 = 10{,}2 \text{ km}^2$
$n_2 = 6$, $A_2 = 0{,}0158 \text{ km}^2$

$$\begin{cases} 20 = k \cdot 10{,}2^b & \Rightarrow k = \frac{20}{10{,}2^b} \\ 6 = k \cdot 0{,}0158^b & \Rightarrow k = \frac{6}{0{,}0158^b} \end{cases}$$

$$\frac{20}{10{,}2^b} = \frac{6}{0{,}0158^b} \quad \Big\| \nearrow\!\!\!\swarrow$$

$$20 \cdot 0{,}0158^b = 6 \cdot 10{,}2^b \quad \| : 10{,}2^b, \; : 20$$

$$\frac{0{,}0158^b}{10{,}2^b} = \frac{6}{20}$$

$$\left(\frac{0{,}0158}{10{,}2}\right)^b = \frac{3}{10}$$

$$\underline{\underline{b}} = \frac{\log \frac{3}{10}}{\log\left(\frac{0{,}0158}{10{,}2}\right)} = 0{,}186081\ldots \approx \underline{\underline{0{,}186}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}} = \frac{20}{10{,}2^b} = 12{,}98219\ldots \approx \underline{\underline{13{,}0}}$$

$\Rightarrow$

Jatkuu 7 b)

Nyt $A = 708 \text{ km}^2$.

$$n = kA^b = 13{,}0 \cdot 708^{0{,}186} = 44{,}0605\ldots$$

$\approx \underline{\underline{44 \text{ lintulajia}}}$

---

8. a) $P(\text{Pitää kaikki 5 luentoa}) = 0{,}8^5$
$= 0{,}32768$
$\approx \underline{\underline{0{,}33}}$

b) $P(\text{Pitää tasan 4 luentoa})$

$$= \binom{5}{4} \cdot 0{,}80^4 \cdot 0{,}20^1 \quad \Big\| \; P(\text{Pitää}) = 0{,}80, \; P(\text{Ei pidä}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}20$$

$$= 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}20$$

$$= 0{,}4096$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}41}}$$

$\Rightarrow$

8. Jatkuu...

Pidetyt luennot x	$P(x)$
0	$P(0) = 0{,}20^5 = 0{,}00032$
1	$P(1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064$
2	$P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$
3	$P(3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048$
4	$P(4) = 0{,}4096$ (b-kohta!)
5	$P(5) = 0{,}32768$ (a-kohta!!)

$$\Rightarrow E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(x_i)$$

$$= 0 \cdot 0{,}00032 + 1 \cdot 0{,}0064 + \ldots + 5 \cdot 0{,}32768$$

$$\underline{\underline{= 4}}$$

---

9. $\bar{a} = (\cos\varphi - 2\sin\varphi)\bar{\imath} + \bar{\jmath} + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)\bar{k}$

$\bar{b} = (\cos\varphi + \sin\varphi)\bar{\imath} + \bar{\jmath} + (\sin\varphi - \cos\varphi)\bar{k}$

a) Vektorit ovat kohtisuorassa jos ja vain jos niiden pistetulo $= 0$.

$$\Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = (\cos\varphi - 2\sin\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1 \cdot 1 + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

$$= \cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin^2\varphi + 1$$
$$+ \sin^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi - 2\cos^2\varphi$$

$$= -\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + 1$$

$$= -\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ Pistetulo $= 0 \Rightarrow \bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa

$\square$

$\Longrightarrow$

9. jatkuu   b) $\varphi = 0$

$$\bar{\imath} - \bar{\jmath} = s\bar{a} + t\bar{b}$$

$$\bar{\imath} - \bar{\jmath} = s\big((1-2\cdot 0)\bar{\imath} + \bar{\jmath} + (0+2\cdot 1)\bar{k}\big) + t\big((1+0)\bar{\imath} + \bar{\jmath} + (0-1)\bar{k}\big)$$

$$\bar{\imath} - \bar{\jmath} = s(\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 2\bar{k}) + t(\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k})$$

$$\bar{\imath} - \bar{\jmath} = (s+t)\bar{\imath} + (s+t)\bar{\jmath} + (2s-t)\bar{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s+t = 1 \\ s+t = -1 \\ 2s-t = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 = -1 \text{ epätosi}$$

$\Rightarrow$ **Vast: Ei ole olemassa!**

---

10. $e^{x+a} = x \quad , a \in \mathbb{R}.$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = e^{x+a} - x$.
$f(x)$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva.

$$f'(x) = e^{x+a} - 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0$$
$$e^{x+a} = 1$$
$$e^{x+a} = e^0$$
$$x + a = 0$$
$$x = -a. \quad \Rightarrow$$

10. JATKUU...   kulkukaavio:

		$-a$	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(-a-1) = e^{-a-1+a} - 1 = e^{-1} - 1 \approx -0{,}53 < 0$$

$$f'(-a+1) = e^{-a+1+a} - 1 = e - 1 \approx 1{,}72 > 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$:n pienin arvo on $f(-a) = e^{-a+a} - (-a)$
$= 1 + a$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{x+a}}_{\to 0} \underbrace{- x}_{-(-\infty)=\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{x+a}}_{\to\infty} - x = \infty$$

$f(x)$:llä on 2 nollakohtaa, jos pienin arvo on negatiivinen $\Rightarrow 1+a<0$
$a<-1$

$f(x)$:llä ei ole nollakohtia, jos pienimmän arvo on positiivinen. $\Rightarrow 1+a>0$
$a>-1$

$f(x)$:llä on tasan 1 nollakohta, jos $1+a=0$
$a=-1$

Vastaus: Yhtälöllä $e^{x+a} = x$, $a \in \mathbb{R}$, on 2 juurta, kun $a<-1$, 1 juuri, kun $a=-1$ ja 0 juurta, kun $a>-1$.

11. a) Olkoon $a_n = \frac{a}{b}$ ja $a_{n+1} = \frac{c}{d}$, missä
$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

$\Rightarrow$ Geometrisen jonon suhdeluku

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{ad} \in \mathbb{Q}.$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}} = \frac{a}{b} : \left(\frac{bc}{ad}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{ad}{bc}\right)^{n-1} \in \mathbb{Q}$$

Näin ollen mielivaltainen jonon luku a_k

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{a}{b}\left(\frac{ad}{bc}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{bc}{ad}\right)^{k-1} \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ Jonon kaikki luvut kuuluvat rationaalilukuihin $\mathbb{Q}$. $\square$

$\Longrightarrow$

11. JATKUU

b) Olkoon (a_n) Geometrinen jono

$$a_1, a_2, \ldots, \underbrace{a_m = \frac{a}{b}}_{\in \mathbb{Q}}, \underbrace{\ldots}_{n-1 \text{ termiä}}, \underbrace{a_{m+n} = \frac{c}{d}}_{\in \mathbb{Q}}, \ldots$$

$$\Rightarrow a_{m+n} = a_m \cdot q^n$$

$$q^n = \frac{a_{m+n}}{a_m} = \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{bc}{ad} \in \mathbb{Q}.$$

Näin ollen rationaalisia ovat luvut:

$$a_m = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

$$a_{m+n} = \frac{a}{b} \cdot q^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{bc}{ad} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$$

$$a_{m+2n} = a_{m+n} \cdot q^n = \frac{c}{d} \cdot \frac{bc}{ad} = \frac{bc^2}{ad^2} \in \mathbb{Q}$$

Vastaavasti a_{m+3n}, a_{m+4n} JNE...

Rationaali-
Näitä lukuja a_{m+kn}, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$
on äärettömästi. $\square$

(12.) Vuorokauden keskilämpötila

$$= \frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$

Askelpituus = 3 (h)

$$\approx \frac{1}{24}\cdot 3\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot f(0) + f(1) + \ldots + f(21) + \frac{1}{2} f(24)\right]$$

$$= \frac{3}{24}\left[\frac{1}{2}\cdot 10{,}2 + 10{,}7 + 12{,}3 + \ldots + 15{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 14{,}2\right]$$

$$= \frac{3}{24}\cdot 115{,}2 = \underline{\underline{14{,}4\ (°C)}}$$

(13.)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(4x+3) - \ln(3x+4)\right)$$

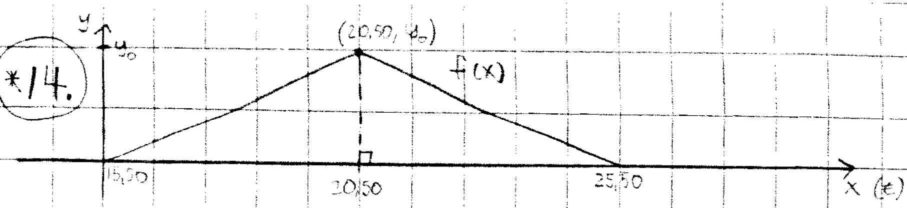
$$= \lim_{x\to\infty} \ln\frac{4x+3}{3x+4}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}$$

$\frac{3}{x} \to 0$, kun $x\to\infty$; $\frac{4}{x} \to 0$, kun $x\to\infty$

$$= \ln\frac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3 = \ln 2^2 - \ln 3 = \underline{\underline{2\ln 2 - \ln 3}}$$

(*14.)



a)

Koska f(x) on tiheysfunktio, on sen ja x-akselin rajaaman alueen ala = 1.

$$\Rightarrow \frac{(25{,}50 - 15{,}50)\cdot y_0}{2} = 1 \quad \|\cdot 2 \quad \text{(kolmion ala)}$$

$$\Leftrightarrow 10y_0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = \frac{1}{5}.$$

Kun $x \in [15{,}50;\ 20{,}50]$ on $(y - y_0 = k(x - x_0))$

$$y - \frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{5}-0}{20{,}50-15{,}50}(x - 20{,}50) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{25}x - \frac{31}{50}.$$

Kun $x \in [20{,}50;\ 25{,}50]$ on

$$y - 0 = \frac{\frac{1}{5}-0}{20{,}50-25{,}50}(x - 25{,}50) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 15{,}50 \\ \frac{1}{25}x - \frac{31}{50}, & \text{kun } 15{,}50 < x < 20{,}50 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}, & \text{kun } 20{,}50 \le x < 25{,}50 \\ 0, & \text{kun } x \ge 25{,}50 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

14. JATKUU...

b) $P(X<19) = \int_{15,50}^{19} f(x)\,dx$

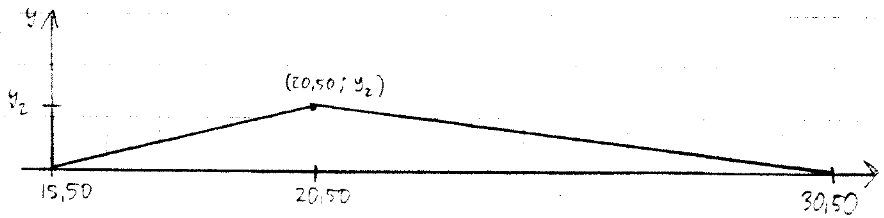
$= \int_{15,50}^{19} \left(\frac{1}{25}x - \frac{31}{50}\right) dx$

$= \Big/_{15,50}^{19} \frac{1}{50}x^2 - \frac{31}{50}x$

$= \frac{1}{50}\cdot 19^2 - \frac{31}{50}\cdot 19 - \left(\frac{1}{50}\cdot 15{,}50^2 - \frac{31}{50}\cdot 15{,}50\right)$

$= -4{,}56 + 4{,}805 = \underline{\underline{0{,}245}} \approx \underline{25\%}$

c)



Nyt $\frac{1}{2}(5\cdot y_2) + \frac{1}{2}(10\cdot y_2) = 1 \quad \| \cdot 2$

$5y_2 + 10y_2 = 2$

$15y_2 = 2$

$y_2 = \frac{2}{15} \quad \Longrightarrow$

14c) JATKUU...

Vastaavat janojen yhtälöt ovat $\left(y_2 = \frac{2}{15}\right)$

$y - 0 = \frac{y_2}{5}(x - 15{,}50) \iff y = \frac{2}{75}x - \frac{31}{75}$ ja

$y - 0 = -\frac{y_2}{10}(x - 30{,}50) \iff y = -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150}$

$\Rightarrow$ Uusi tih. funktio on $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 15{,}50 \\ \frac{2}{75}x - \frac{31}{75}, & \text{kun } 15{,}50 < x < 20{,}50 \\ -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150}, & \text{kun } 20{,}50 \leq x < 30{,}50 \\ 0, & \text{kun } x \geq 30{,}50 \end{cases}$

Odotusarvo $E(X) = \int_{15,50}^{30,50} x\cdot f(x)\,dx$

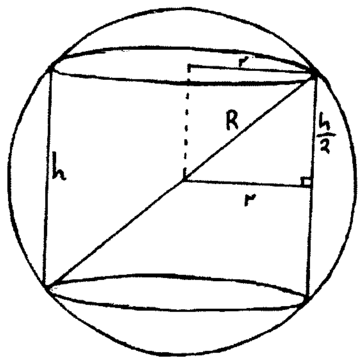
$= \int_{15,50}^{20,50} \left(\frac{2}{75}x^2 - \frac{31}{75}x\right)dx + \int_{20,50}^{30,50} \left(-\frac{1}{75}x^2 + \frac{61}{150}x\right)dx$

$= \Big/_{15,50}^{20,50} \frac{2}{225}x^3 - \frac{31}{150}x^2 + \Big/_{20,50}^{30,50} -\frac{1}{225}x^3 + \frac{61}{300}x^2$

$= \frac{113}{18} + \frac{143}{9}$ (laskimella)

$= \frac{133}{6} = 22{,}1666... \approx \underline{\underline{22{,}17\ (€)}}$

*15.



Kuvasta saadaan Pythagoraan lauseella ilmoitettua pallon säde lieriön säteen ja korkeuden avulla.

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$$

Pallon pinta-ala on tämän avulla:

$$\begin{aligned} A_p &= 4\pi R^2 \\ &= 4\pi\left(\frac{h^2}{4} + r^2\right) \\ &= \pi h^2 + 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Lieriön pinta-ala on

$$A_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Täten pinta-alojen suhde on

$$t = \frac{A_p}{A_l} = \frac{\pi h^2 + 4\pi r^2}{2\pi r^2 + 2\pi r h} = \frac{h^2 + 4r^2}{2r^2 + 2rh}$$ 1 p

a) Tästä saadaan lierion korkeuden suhde säteeseen t:n avulla:

$$\begin{aligned} t &= \frac{h^2 + 4r^2}{2r^2 + 2rh} \\ 2tr^2 + 2trh &= h^2 + 4r^2 \quad \| : r^2 \\ 2t + 2t\frac{h}{r} &= \frac{h^2}{r^2} + 4 \quad \|\text{merkitään } \frac{h}{r} = z \\ 2t + 2tz &= z^2 + 4 \\ z^2 - 2tz + 4 - 2t &= 0 \\ z &= \frac{2t \pm \sqrt{(-2t)^2 - 4\cdot 1\cdot(4-2t)}}{2} = \frac{2t \pm 2\sqrt{t^2 + 2t - 4}}{2} \\ &= t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 4} \end{aligned}$$

Eli

$$\frac{h}{r} = t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 4} \qquad (1)$$ 1 p (2 p)

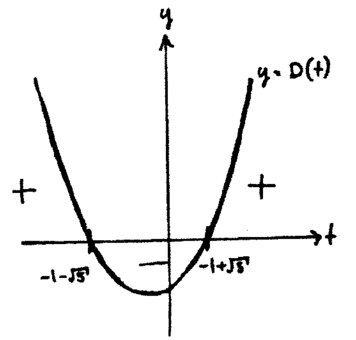
b) Lieriötä ei ole olemassa, kun $\frac{h}{r}$ ei ole määritelty yhtälössä (1), eli kun diskriminantti

$$D(t) = t^2 + 2t - 4 < 0$$

Etsitään nollakohdat:

$$\begin{aligned} t^2 + 2t - 4 &= 0 \\ t &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} \\ t = -1 - \sqrt{5} &\quad \text{tai} \quad t = -1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$D(t)$ on ylöspäin aukeava paraabeli.



Täten $D(t) < 0$, kun

$$-1 - \sqrt{5} < t < -1 + \sqrt{5}$$ 1 p (3 p)

Lieriötä ei ole myöskään silloin, kun $t \leq 0$, koska suhde $\frac{h}{r}$ ei voi olla negatiivinen. Kaikilla muilla t:n arvoilla, eli kun

$$t \geq -1 + \sqrt{5},$$

lauseke (1) on määritelty. Lisäksi

$$t + \sqrt{t^2 - 2t - 4}$$

on positiivinen luku, koska $t > 0$, joten tällöin on olemassa ainakin yksi tehtävänannon mukainen lieriö. Täten siis tehtävänannon mukaista lieriötä ei ole olemassa, kun parametri

$$\underline{\underline{t < -1 + \sqrt{5}}}$$ 1 p (4 p)

c) Täsmälleen yksi lieriö on olemassa sellaisella t, jolla on olemassa vain yksi lieriön korkeuden ja säteen suhde (1). Näin on ainakin silloin, kun

$$D(t) = t^2 - 2t - 4 = 0$$

b-kohdan mukaan nollakohdat ovat $t_1 = -1 - \sqrt{5}$ ja $t_2 = -1 + \sqrt{5}$, joista vain $t_2 = -1 + \sqrt{5}$ kelpaa, koska $t > 0$. 1 p (5 p) b-kohdan mukaan lauseke (1) on määritelty kaikilla $t \geq -1 + \sqrt{5}$. Suhteen $\frac{h}{r}$ on kuitenkin oltava positiivinen, joten lausekkeen (1) negatiiviset arvot ja arvo nolla täytyy hylätä.

$$t + \sqrt{t^2 - 2t - 4}$$

on aina positiivinen, kun $t > 0$, mutta lauseke

$$t - \sqrt{t^2 - 2t - 4}$$

voi saada negatiivisiakin arvoja tai arvon nolla. Kun

$$t - \sqrt{t^2 - 2t - 4} \leq 0,$$

kaava (1) antaa vain yhden kelvollisen suhteen $\frac{h}{r}$ ja lieriöitä on vain yksi. Tutkitaan, milloin $t - \sqrt{t^2 - 2t - 4} \leq 0$, kun $t \geq -1 + \sqrt{5}$.

$$t - \sqrt{t^2 - 2t - 4} \leq 0$$ 1 p (6 p)

$$t \leq \sqrt{t^2 - 2t - 4}$$
$$\cancel{t^2} \leq \cancel{t^2} - 2t - 4$$
$$2t - 4 \geq 0$$
$$2t \geq 4$$
$$t \geq 2$$

Täten siis on vain yksi tehtävänannon mukainen lieriö, kun

$$\underline{\underline{t = -1 + \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad t \geq 2}}$$ 1 p (7 p)

d) Kaksi lieriötä löytyy, kun

$$D(t) = t^2 - 2t - 4 > 0 \quad \text{ja}$$
$$t - \sqrt{t^2 - 2t - 4} > 0$$

b- ja c-kohtien nojalla näin on, kun

$$\underline{\underline{-1 + \sqrt{5} < t < 2}}$$ 2 p (9 p)