1. a)

$$(x-2)(x-3)=6$$
$$x^2-3x-2x+6=6$$
$$x^2-5x=0$$
$$x(x-5)=0 \mid\mid TNS$$
$$\underline{\underline{x=0 \text{ tai } x=5}}$$

b)

$$\begin{cases} y=x^2+x+1 \mid\mid \cdot(-1) \\ y=x^2+2x+3 \end{cases}$$
$$0=0+x+2$$
$$x=-2 \quad \Rightarrow \quad y=(-2)^2-2+1=3$$

Paraabelit leikkaavat $\underline{\underline{\text{pisteessä } (-2,\ 3)}}$.

c)

Merkitään lukua x:llä $(x \neq 0)$.

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2}=4 \mid\mid \cdot 2$$
$$x+\frac{1}{x}=8 \mid\mid \cdot x$$
$$x^2+1=8x$$
$$x^2-8x+1=0$$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4\cdot 15}}{2}=\frac{8\pm 2\sqrt{15}}{2}$$
$$\underline{\underline{x=4-\sqrt{15} \text{ tai } x=4+\sqrt{15}}}$$

2. a)

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \mid\mid \cdot 3 \\ 3x-2y=4 \mid\mid \cdot(-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x+9y=21 \\ -6x+4y=-8 \end{cases}$$
$$13y=13$$
$$y=1$$
$$2x+3y=7$$
$$2x=7-3$$
$$x=2$$

$\underline{\underline{\text{Leikkauspiste on } (2,\ 1).}}$

b)

Luvun, x, on oltava $x \geq 0$.

$$x=\frac{\sqrt{x}}{2} \mid\mid \cdot 2$$
$$2x=\sqrt{x} \mid\mid (\ )^2 \quad \text{(mol. puolet } \geq 0.)$$
$$4x^2=x$$
$$4x^2-x=0$$
$$x(4x-1)=0 \mid\mid TNS$$
$$\underline{\underline{x=0 \text{ tai } x=\frac{1}{4}}}$$

c)

$$\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right)+\ln 3+2\ln x,\quad x>0$$
$$=\ln 1-\ln 3x^2+\ln 3+2\ln x$$
$$=0-(\ln 3+\ln x^2)+\ln 3+\ln x^2$$
$$=-\ln 3-\ln x^2+\ln 3+\ln x^2$$
$$=\underline{\underline{0}}$$

3. a) $f(t)=38-2e^{-0,6t}$ $(^\circ\text{C})$.

Koska $e^{-0,6t}>0$, niin funktion $f(t)$ arvo poikkeaa aina 38,0:sta alaspäin.

$$38,0-f(t)\le 0,1$$
$$38,0-(38-2e^{-0,6t})\le 0,1$$
$$2e^{-0,6t}\le 0,1 \quad \|:2$$
$$e^{-0,6t}\le 0,05 \quad \|\ln$$
$$-0,6t\le \ln 0,05 \quad \|:(-0,6)$$
$$t\ge 4,992887...\approx 5$$

Vastaus: Mittausta pitää jatkaa $\underline{\underline{\text{5 minuuttia}}}$

b)

$$f(t)=38-2e^{-0,6t}$$
$$f'(t)=-2e^{-0,6t}\cdot(-0,6)=1,2e^{-0,6t}$$
$$f'(3)=1,2e^{-0,6\cdot 3}$$
$$=0,198358...$$
$$\approx \underline{\underline{0,2\ \ (^\circ C/\text{min})}}$$

4. Paraabeli $y=x^2$ muodostuu pisteistä $\text{P}=(x,\ x^2)$.

Pisteen P paikkavektori on $\overline{\text{OP}}=x\overline{i}+x^2\overline{j}$.

Uuden käyrän pisteiden paikkavektorit ovat $\overline{\text{OP}}+\overline{v}$.

a)

$$\overline{\text{OP}}+\overline{v}=x\overline{i}+x^2\overline{j}+2\overline{j}$$
$$=x\overline{i}+(x^2+2)\overline{j}$$
$$\Rightarrow y=f(x)=\underline{\underline{x^2+2}}$$

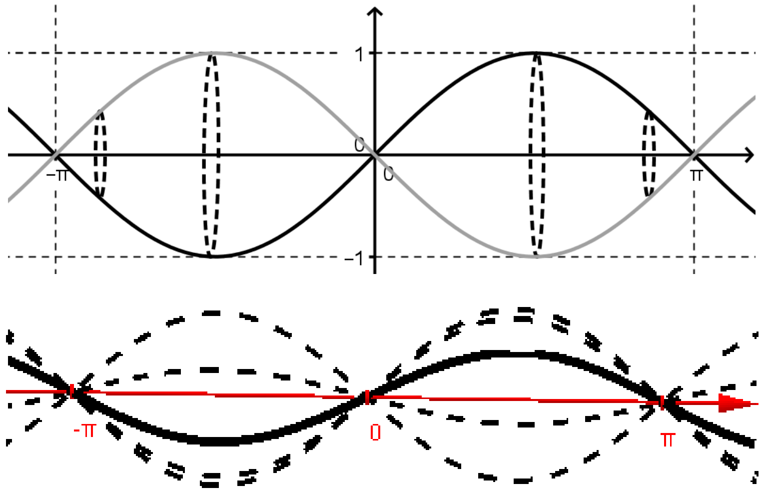
b)

$$\overline{\text{OP}}+\overline{v}=x\overline{i}+x^2\overline{j}+3\overline{i}$$
$$=(x+3)\overline{i}+x^2\overline{j} \quad \|\text{Vähennetään } x\text{:stä luku 3.}$$
$$=(x+3-3)\overline{i}+(x-3)^2\overline{j}$$
$$=x\overline{i}+(x-3)^2\overline{j}$$
$$\Rightarrow y=f(x)=\underline{\underline{(x-3)^2=x^2-6x+9}}$$

c)

$$\overline{\text{OP}}+\overline{v}=x\overline{i}+x^2\overline{j}+3\overline{i}+2\overline{j}$$
$$=(x+3)\overline{i}+(x^2+2)\overline{j} \quad \|\text{Vähennetään } x\text{:stä luku 3.}$$
$$=(x+3-3)\overline{i}+((x-3)^2+2)\overline{j}$$
$$=x\overline{i}+(x^2-6x+9+2)\overline{j}$$
$$\Rightarrow y=f(x)=\underline{\underline{x^2-6x+11}}$$

5. $y = \sin x, \quad -\pi \le x \le \pi.$



$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 dx = 2 \cdot \pi \int_{0}^{\pi} (\sin x)^2 dx \quad \| \text{ Symmetria!}$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))dx \quad \| \text{ MAOL:n kaava!}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x))dx$$

$$= \pi \Big/_{0}^{\pi} (x - \frac{1}{2}\sin(2x))$$

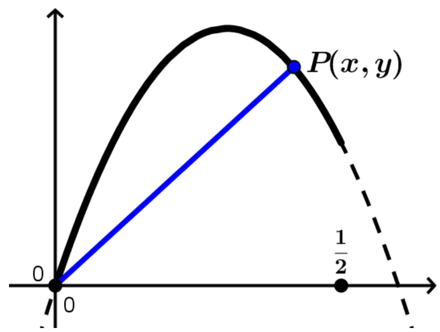
$$= \pi(\pi - \frac{1}{2}\sin(2\pi) - (0 - \frac{1}{2}\sin 0))$$

$$= \pi(\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 - (0 - 0))$$

$$= \underline{\underline{\pi^2}}$$

6. $y = f(x) = 3x - 5x^2,\quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$. Olkoon $P(x,\ y) = (x,\ 3x - 5x^2)$ tämän paraabelikaaren piste.

Muodostetaan funktio $d(x)$, joka ilmaisee pisteen P etäisyyden origosta:



$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{x^2 + y^2},\quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{x^2 + (3x - 5x^2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 9x^2 - 30x^3 + 25x^4} \\ &= \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 10x^2} \end{aligned}$$

P:n etäisyys origosta on suurin kun juurettava $p(x) = 25x^4 - 30x^3 + 10x^2$ saa suurimman arvonsa.

$$p'(x) = 100x^3 - 90x^2 + 20x$$

$$\begin{aligned} &p'(x) = 0 \\ &100x^3 - 90x^2 + 20x = 0 \\ &x(100x^2 - 90x + 20) = 0 \\ &x = 0 \ \text{ tai } \ 100x^2 - 90x + 20 = 0 \\ &x = 0 \ \text{ tai } \ x = \frac{2}{5} \ \text{ tai } \ x = \frac{1}{2} \quad \text{(ratk. kaavalla tai laskimella)} \end{aligned}$$

Kulkukaavio:

$p'(\frac{1}{5}) = 1{,}2 > 0$

$p'(0{,}45) = -0{,}1125 < 0$

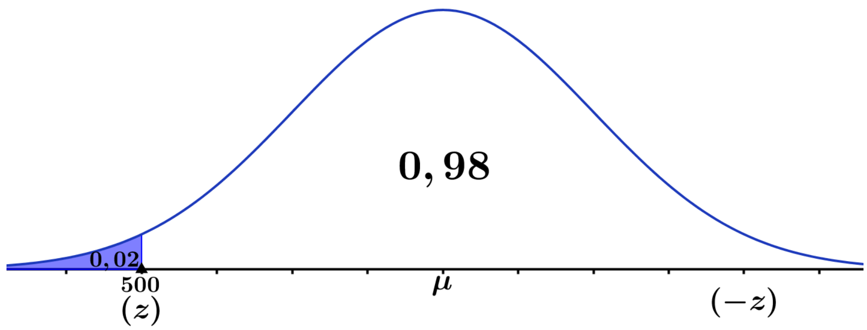
		0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	
$p'(x)$		$+$	$-$		
$p(x)$		↗	↘		

Kulkukaaviosta nähdään, että $p(x)$ (ja siten myös $d(x)$) saa suurimman arvon, kun $x = \frac{2}{5}$.

Arvoa vastaava paraabelinkaaren piste on

$$(x,\ y) = (x,\ 3x - 5x^2) = \left(\frac{2}{5},\ 3\cdot\frac{2}{5} - 5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\right) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{5}\right)}}.$$

7. Keskihajonta $\sigma = 10$ (g). Odotusarvo $= \mu$.



Normitetaan $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{500-\mu}{10}$.

$$\begin{aligned}
\Phi(-z) &= 0,98 \\
\Phi\left(-\frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,98 \\
\Phi\left(\frac{-500+\mu}{10}\right) &= 0,98 \quad \| \text{ Katsotaan taulukosta lähin pinta-alan 0,9800 antava kohta} \\
\frac{-500+\mu}{10} &= 2,05 \,\| \cdot 10 \\
-500+\mu &= 20,5 \\
\mu &= 520,5 \approx \underline{\underline{521 \text{ (g)}}}
\end{aligned}$$

8. a) (a_n) on geometrinen jono, jossa $a_n > 0$ kaikilla n:n arvoilla.

Väite: $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ kaikilla $n = 2,3,\ldots$.

Todistus:

Olkoon $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n = 2,3,\ldots$.

Tällöin

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} &= \sqrt{a_1 q^{(n-1)-1} \cdot a_1 q^{(n+1)-1}} \\
&= \sqrt{a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^n} \\
&= \sqrt{a_1^2 q^{n-2} q^n} \\
&= \sqrt{a_1^2 q^{n-2+n}} \\
&= \sqrt{a_1^2 q^{2n-2}} \\
&= \sqrt{a_1^2 q^{2(n-1)}} \\
&= \sqrt{a_1^2 (q^{n-1})^2} \\
&= a_1 q^{n-1} \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

b) Oletetaan, että $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ kaikilla $n = 2,3,\ldots$.

Väite: Jono (b_n) on geometrinen jono.

Todistus:

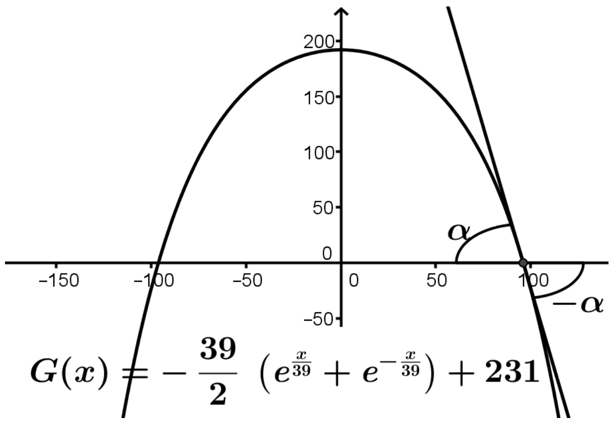
$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}} \quad || ()^2 \quad \text{(mol. puol } > 0)$$

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} \quad ||: b_n$$

$$b_n = \frac{b_{n-1}b_{n+1}}{b_n} \quad ||: b_{n-1}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$ $\Rightarrow$ Peräkkäisten jäsenten suhde on siis aina sama, joten jono on geometrinen!

9. $y=-39f(\frac{x}{39})+231,$ missä $f(t)=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}).$



Merkitään $G(x)=-39f(\frac{x}{39})+231=-39\cdot\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{39}}+e^{-\frac{x}{39}})+231=-\frac{39}{2}e^{\frac{x}{39}}-\frac{39}{2}e^{-\frac{x}{39}}+231.$

a) Koska *y*-akseli on symmetria akseli, niin kaaren huippu on *y*-akselilla:

$$G(0)=-\frac{39}{2}e^{\frac{0}{39}}-\frac{39}{2}e^{-\frac{0}{39}}+231=\underline{\underline{192\ (\mathrm{m})}}$$

b) Nollakohdat:

$$G(x)=0$$

$$-\frac{39}{2}e^{\frac{x}{39}}-\frac{39}{2}e^{-\frac{x}{39}}+231=0\ \|\cdot(-\frac{2}{39})$$

$$e^{\frac{x}{39}}+e^{-\frac{x}{39}}=\frac{154}{13}\ \|\ \text{Merkitään } s=e^{\frac{x}{39}}$$

$$s+\frac{1}{s}=\frac{154}{13}$$

$$\frac{s^2+1}{s}=\frac{154}{13}$$

$$13s^2+13=154s$$

$$13s^2-154s+13=0$$

$$s=\frac{-(-154)\pm\sqrt{(-154)^2-4\cdot13\cdot13}}{2\cdot13}=\frac{154\pm\sqrt{23040}}{26}$$

$$s=e^{\frac{x}{39}}=(-0,85025...)\quad\text{tai}\quad s=e^{\frac{x}{39}}=11,761127...\ \|\ln$$

$$\frac{x}{39}=\ln 11,761127...\ \|\cdot39$$

$$x=96,1271943...$$

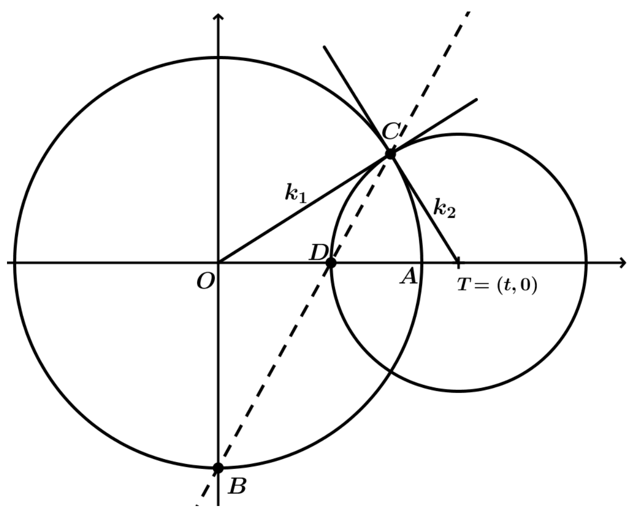
Kaaren leveys on $2x=2\cdot96,1271943...=192,25438...\approx\underline{\underline{192\ \mathrm{m}}}.$

c)

$$G'(x) = -\frac{39}{2}e^{\frac{x}{39}} \cdot \frac{1}{39} - \frac{39}{2}e^{-\frac{x}{39}} \cdot \left(-\frac{1}{39}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{\frac{x}{39}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{39}}$$

$$k = \tan(-\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = G'(96{,}1271943...)$$
$$\tan(-\alpha) = -5{,}83805... \parallel \tan^{-1}$$
$$-\alpha = -80{,}2801...^\circ$$
$$\underline{\underline{\alpha \approx 80^\circ}}$$

10. $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ ja $t > 1$. $T = (t, 0)$.



a) Pisteeseen C piirretyt ympyröiden säteet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, koska ympyrät leikkaavat kohtisuorasti!

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$
$$\frac{y-0}{x-0} \cdot \frac{y-0}{x-t} = -1$$
$$\frac{y^2}{x^2 - xt} = -1$$
$$y^2 = -x^2 + xt \parallel x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$$
$$1 - x^2 = -x^2 + xt$$
$$1 = xt$$
$$x = \frac{1}{t}$$
$$y^2 = 1 - x^2 \parallel (y > 0)$$
$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}$$

$$\underline{\underline{C = \left(\frac{1}{t}, \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)}}$$

b)

Pienemmän ympyrän säde *TC*:

$$TC=\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}-0\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^2+\frac{t^2-1}{t^2}}=\sqrt{\frac{1-2t^2+t^4+t^2-1}{t^2}}=\sqrt{\frac{t^4-t^2}{t^2}}=\sqrt{t^2-1}.$$

Pisteen *D* *x*-koordinaatti $= t-|TD| = t-|TC| = t-\sqrt{t^2-1}$.

Janojen *CB* ja *CD* ja kulmakertoimet:

$$k_{CB}=\frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}-(-1)}{\frac{1}{t}-0}=\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+1\right)\cdot\frac{t}{1}=\sqrt{t^2-1}+t$$

$$k_{CD}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}-0}{\frac{1}{t}-(t-\sqrt{t^2-1})}=\frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}}{\frac{1}{t}-t+\sqrt{t^2-1}}=\frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}}{\frac{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}{t}}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{t}{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}$$

$$\overset{1-t^2-t\sqrt{t^2-1})}{=}\frac{\sqrt{t^2-1}}{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}=\frac{(1-t^2-t\sqrt{t^2-1})\sqrt{t^2-1}}{(1-t^2)^2-(t\sqrt{t^2-1})^2}=\frac{(1-t^2)\sqrt{t^2-1}-t\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}}{(1-t^2)^2-t^2(t^2-1)}$$

$$=\frac{(1-t^2)\sqrt{t^2-1}-t(t^2-1)}{(1-t^2)[(1-t^2)+t^2]}=\frac{\cancel{(1-t^2)}\,(\sqrt{t^2-1}+t)}{\cancel{1-t^2}}=\sqrt{t^2-1}+t$$

Koska $k_{CD}=k_{CB}$, niin pisteet *B*, *C* ja *D* ovat samalla suoralla.

11. a) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

$$f'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x+e^{2x}-e^{2x}}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0 \text{ kaikilla } x, \text{ sillä } e^x>0.$$

Koska $f'(x)>0$ kaikilla *x*, niin $f(x)$ on aidosti kasvava

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(\frac{1}{e^x}+1)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{e^x}}}_{\searrow 0}+1}\\ &= \frac{1}{0+1}\\ &= \underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

c) $f(10)=\dfrac{e^{10}}{1+e^{10}}=0{,}9999546...>0{,}999.$

Koska lisäksi $f(x)$ on aidosti kasvava, niin epäyhtälö pätee kaikilla $x\geq 10$.

12. a) "Jokaista reaalilukua *x* kohti on olemassa reaaliluku *y* siten, että $x\leq y$."

Väite on **tosi**, sillä luvuksi *y* kelpaa aina esim. luku *x*.

b) "On olemassa reaaliluku *y* siten, että olipa reaaliluku *x* mikä tahansa, niin $x\leq y$."

Väite on **epätosi**, sillä ei ole olemassa suurinta reaalilukua *y*.

c) "On olemassa luonnollinen luku *x* siten, että olipa *y* mikä tahansa luonnollinen luku, niin $x\leq y$."

Väite on **tosi**, sillä on olemassa tällainen pienin luonnollinen luku, $x=0$.

13. a)

$x^5 - x = 1$

Merkitään $f(x) = x^5 - x - 1$.

$f(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0$

$f(2) = 2^5 - 2 - 1 = 29 > 0$

$f(x)$ on polynomina jatkuva funktio. Siten se ei voi vaihtaa merkkiään välin päätepisteissä kulkematta nollakohdan kautta. Funktiolla $f(x)$ on siten <u>ainakin yksi nollakohta</u> välillä $1 \le x \le 2$.

$f'(x) = 5x^4 - 1 > 0$ välillä $1 \le x \le 2$. Funktio $f(x)$ on siten aidosti kasvava välillä $1 \le x \le 2$. Näin ollen funktiolla $f(x)$ on <u>täsmälleen yksi nollakohta</u> välillä $1 \le x \le 2$.

Siispä yhtälöllä $x^5 - x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $1 \le x \le 2$.

b) Alkuarvo $x_0 = 1$. Newtonin menetelmä $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

$$x_0 = 1$$

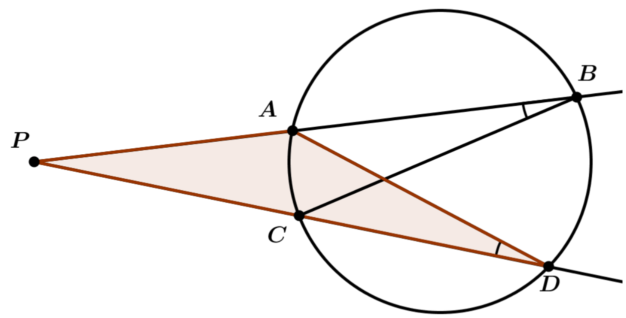
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1^5 - 1 - 1}{5 \cdot 1^4 - 1} = 1{,}25.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}25 - \frac{f(1{,}25)}{f'(1{,}25)} = 1{,}17845939...$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}1675...$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}1673... \approx \underline{\underline{1{,}167}}$$

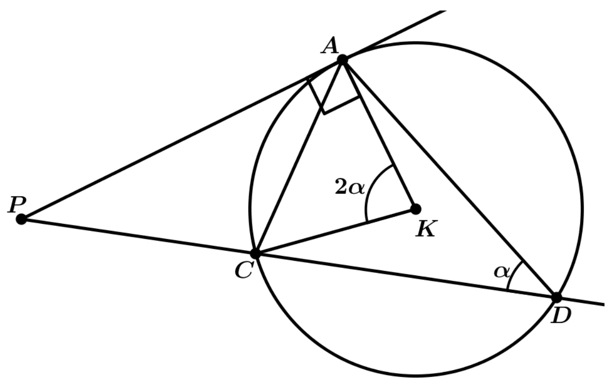
14. a) Kulmat $\sphericalangle ABC$ ja $\sphericalangle ADC$ ovat yhtä suuret samaa ympyrän kaarta AC vastaavina kehäkulmina. Kulma P on molempien kolmioiden PCB ja PAD kulma. Koska kolmioissa on näin ollen kaksi yhtä suurta kulmaa, ovat ne yhdenmuotoiset (kk-lause!).



b) Kolmioiden PCB ja PAD yhdenmuotoisuudesta seuraa:

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB} \quad \Leftrightarrow \quad PA\cdot PB = PC\cdot PD.$$

c)



Nyt pisteiden P ja A kautta kulkeva suora on ympyrän tangentti. Säde KA on siten sitä vastaan kohtisuorassa.

Kehäkulmaa $\sphericalangle D=\alpha$ vastaavana keskuskulmana $\sphericalangle K = 2\alpha$.

Tasakylkisen kolmion kantakulmina kulmat $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KCA = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$.

Kulma $\sphericalangle PAC = 90^\circ - \sphericalangle KAC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

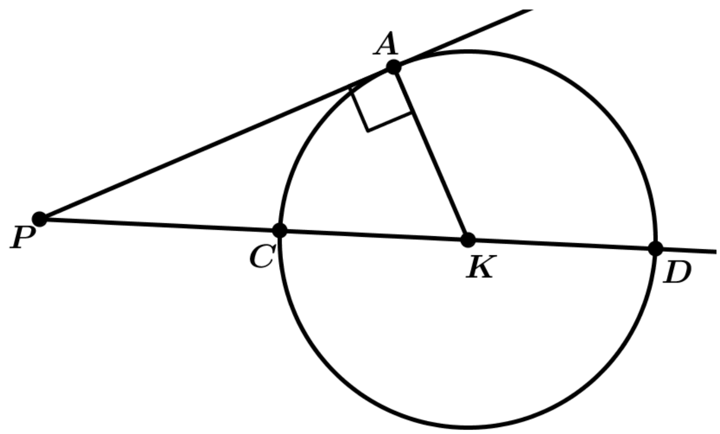
Kolmiot PAC ja PDA ovat siis yhdenmuotoiset (kk-lause), sillä molemmissa on sama kulma P ja α:n suuruinen kulma.

$$\Rightarrow \quad \frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PA} \quad \Leftrightarrow \quad (PA)^2 = PC\cdot PD.$$

d) Kohdan c) perusteella pätee

$$(PA)^2 = PC \cdot PD$$
$$(PA)^2 = (PD - 2 \cdot r) \cdot PD$$
$$(PA)^2 = (PD)^2 - 2 \cdot KA \cdot PD$$

$$\begin{aligned}(PK)^2 &= (PD - KD)^2 \\ &= (PD - KA)^2 \\ &= \underbrace{(PD)^2 - 2 \cdot PD \cdot KA}_{=(PA)^2 \ \text{(yllä osoitettu)}} + (KA)^2 \\ &= (PA)^2 + (KA)^2,\end{aligned}$$ mikä osoittaa Pythagoraan lauseen!



15. a) Väite: $xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ kaikille reaaliluvuille x ja y.

Tod.

$(x-y)^2 \ge 0$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

$$x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$$

$$-2xy \ge -x^2 - y^2 \quad || : (-2) < 0!$$

$$xy \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

b)

$$\begin{aligned}
x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n &\le \frac{1}{2}\left[\left(x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}\right) + \left(x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}\right) + \ldots + \left(x_n^{\ 2} + y_n^{\ 2}\right)\right] \qquad || \text{ (a-kohta!!)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}\right) + \left(y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2} + \ldots + y_n^{\ 2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{A}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{B}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{B}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b_n}{B}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{a_1^{\ 2} + a_1^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}}{A^2} + \frac{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \ldots + b_n^{\ 2}}{B^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{a_1^{\ 2} + a_1^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}}}{\cancel{a_1^{\ 2} + a_1^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}}} + \frac{\cancel{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \ldots + b_n^{\ 2}}}{\cancel{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \ldots + b_n^{\ 2}}}\right] \\
&= \frac{1}{2}[1+1] \\
&= 1 \qquad \text{Siis } x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \le 1.
\end{aligned}$$

c)

$$x_k = \frac{a_k}{A} \;||\cdot A \qquad y_k = \frac{b_k}{B} \;||\cdot B$$

$$a_k = x_k \cdot A \qquad b_k = y_k \cdot B$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &= x_1Ay_1B + x_2Ay_2B + \ldots + x_nAy_nB \\
&= AB(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) \\
&\le AB \cdot 1 \qquad \text{(b-kohta!!)} \\
&= \sqrt{a_1^{\ 2} + a_1^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}} + \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \ldots + b_n^{\ 2}}
\end{aligned}$$