Lääkiskurssi

- 5-8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa **1.9., 2.11., 11.1., 22.2.** tai **4.4.** Opetusajaksi voi yleensä valita joko 9.30-12.30 tai 13-16 tai 17-20.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta ja pitkällä kurssilla lisäksi 6 yo-koetta
- Pitkä kurssi **22.2.-27.5.** ja kevätkurssi **5.4.-27.5.**

Pitkä matematiikka, syksy 2015

Mallivastaukset, 23.9.2015

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään he opettavat MAFY:n kursseilla ympäri vuoden ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Olli Hirviniemi, Sakke Suomalainen, Viljami Suominen ja Matti Virolainen. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a) Määritä sellainen vakio a, että luku 2015 on yhtälön $ax = 2015 + a$ juuri.
   b) Laske neliön piiri, kun sen lävistäjän pituus on 6.
   c) Tarkastellaan muotoa $\frac{m}{n}$ olevia lukuja, kun $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ja $n \in \{2, 3, 4\}$. Määritä näistä luvuista suurin ja pienin.

Ratkaisu.

a) Sijoitetaan 2015 yhtälöön x:n paikalle ja ratkaistaan a:n suhteen:

$$a \cdot 2015 = 2015 + a$$

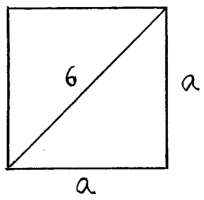
1p

$$2014a = 2015$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2015}{2014}}}$$

1p (2p)

b)



Neliön lävistäjä d on Pythagoraan lauseen nojalla

$$d = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{2}a$$

1p (3p)

$$6 = \sqrt{2}a \quad \| : \sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{2}$$

Neliön piiri on

$$p = 4a$$

$$p = 4 \cdot 3\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{p = 12\sqrt{2}}}$$

1p (4p)

c)

Ratkaisuvaihtoehto 1

Muotoa $\frac{m}{n}$ oleva luku on annetuilla m ja n suurin, kun $\frac{m}{n} > 0$ ja $|m|$ on mahdollisimman suuri ja $|n|$ mahdollisimman pieni, sekä $n \neq 0$. Siten $\frac{m}{n}$ on suurin, kun $m = 2$ ja $n = 2$. Tällöin $\frac{m}{n} = \frac{2}{2} = 1$. 1p (5p)

Vastaavasti pienin $\frac{m}{n}$ on silloin, kun $\frac{m}{n} < 0$ ja $\left|\frac{m}{n}\right|$ on mahdollisimman suuri. Näin on, kun $m = -1$ ja $n = 2$, eli $\frac{m}{n} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$. 1p (6p)

Vastaus: Suurin $\frac{m}{n} = 1$ ja pienin $\frac{m}{n} = -\frac{1}{2}$.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Muodostetaan annetuilla m ja n kaikki 12 vaihtoehtoista osamäärää $\dfrac{m}{n}$.

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = -1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
$m = 0$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{0}{3} = 0$	$\frac{0}{4} = 0$
$m = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$m = 2$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

1p (5p)

Vastaus: Suurin $\frac{m}{n} = 1$ ja pienin $\frac{m}{n} = -\frac{1}{2}$. 1p (6p)

2. Tasokäyrä kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta. Määritä käyrän yhtälö, kun kyseessä on

a) origon kautta kulkeva suora
b) origokeskinen ympyrä
c) ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa.

Ratkaisu. Tasokäyrä kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta.

a) Origon $(0, 0)$ kautta kulkeva suora on muotoa

$$y = kx.$$

Kulmakerroin

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$K = \frac{4-0}{3-0}$$
$$K = \frac{4}{3}$$

1p

Suoran yhtälö on siten $\underline{\underline{y = \frac{4}{3}x.}}$

1p (2p)

b) Origokeskisen ympyrän yhtälö on muotoa

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Sijoitetaan piste $(3, 4)$ ympyrän yhtälöön

$$3^2 + 4^2 = r^2$$
$$r^2 = 25,$$

1p (3p)

joten ympyrän yhtälö on $\underline{\underline{x^2 + y^2 = 25.}}$

1p (4p)

c) Ylöspäin aukeavan paraabelin, jonka huippu on origossa, yhtälö on muotoa

$$y = ax^2, \quad a > 0.$$

Sijoitetaan pisteen $(3, 4)$ koordinaatit yhtälöön. Saadaan

$$4 = a \cdot 3^2 \quad \| : 3^2$$
$$a = \frac{4}{9}.$$

1p (5p)

Paraabelin yhtälö on $\underline{\underline{y = \frac{4}{9}x^2.}}$

1p (6p)

3. a) Kuntopolun pituus kartalla on 17,5 cm. Mikä on polun pituus maastossa, kun kartan mittakaava on 1 : 20 000? Anna vastaus 100 metrin tarkkuudella.
   b) Laske kuution yhden sivutahkon pinta-ala neliösenttimetrin tarkkuudella, kun kuution tilavuus on 7,0 litraa.

Ratkaisu.

a) Mittakaava $k = 1 : 20\,000$.
Pituus kartalla $x_1 = 17{,}5\,\text{cm} = 0{,}175\,\text{m}$.
Pituus maastossa x_2, saadaan yhtälöstä

$$k = \frac{x_1}{x_2}$$ 1p

$$\frac{1}{20\,000} = \frac{0{,}175\,\text{m}}{x_2} \quad \| \cdot 20\,000 x_2 \quad (x_2 > 0)$$ 1p (2p)

$$x_2 = 20\,0000 \cdot 0{,}175\,\text{m}$$
$$x_2 = 3\,500\,\text{m}$$

Vastaus: Polun pituus maastossa on 3 500 m. 1p (4p)

b) Merkitään kuution särmän pituutta a:lla. Tilavuus $V = 7{,}0\,\text{l} = 7{,}0\,\text{dm}^3 = 7\,000\,\text{cm}^3$. 1p (4p)

$$V = a^3$$
$$a = \sqrt[3]{V}$$ 1p (5p)

Yhden sivutahkon pinta-ala on

$$A_S = a^2$$
$$A_S = \left(\sqrt[3]{V}\right)^2$$
$$A_S = \left(\sqrt[3]{7\,000\,\text{cm}^3}\right)^2$$
$$A_S = 365{,}9305\ldots\ \text{cm}^2$$
$$\approx 366\,\text{cm}^2$$

Vastaus: Sivutahkon pinta-ala on $366\,\text{cm}^2$. 1p (6p)

4. Olkoon $A = (1, 2)$. Vektorin $\overline{AB}$ pituus on 3, ja se on kohtisuorassa vektoria $3\bar{i} + 4\bar{j}$ vastaan. Määritä pisteen B koordinaatit.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} A &= (1, 2) \\ |\overline{AB}| &= 3 \\ \overline{AB} &\perp (3\bar{i} + 4\bar{j}) \end{aligned}$$

Merkitään

$$\overline{AB} = a\bar{i} + b\bar{j}.$$

Kohtisuoruusehto

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot (3\bar{i} + 4\bar{j}) &= 0 && \text{1p} \\ (a\bar{i} + b\bar{j}) \cdot (3\bar{i} + 4\bar{j}) &= 0 \\ 3a + 4b &= 0 \\ a &= -\frac{4}{3}b && (1) \end{aligned}$$

Pituudesta saadaan

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= 3 \\ \sqrt{a^2 + b^2} &= 3 \quad \| ()^2 && \text{1p (2p)} \\ a^2 + b^2 &= 9 && (2) \end{aligned}$$

Sijoitetaan (1) yhtälöön (2)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 &= 9 \\ \frac{25}{9}b^2 &= 9 \quad \Big\| : \tfrac{25}{9} \\ b^2 &= \frac{81}{25} \\ b &= \pm\frac{9}{5} && \text{1p (3p)} \end{aligned}$$

Merkitään $b_1 = \frac{9}{5}$ ja $b_2 = -\frac{9}{2}$. Yhtälöstä (1) saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4}{3}b_1 & \text{ja} \qquad a_2 &= -\frac{4}{3}b_2 \\ a_1 &= -\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} & a_2 &= -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \\ a_1 &= -\frac{12}{5} & a_2 &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Siten vektori $\overline{AB}$ on

$$-\frac{12}{5}\bar{i}+\frac{9}{5}\bar{j} \quad \text{tai} \quad \frac{12}{5}\bar{i}-\frac{9}{5}\bar{j}.$$

2p
(5p)

Ja vastaavasti pisteen B koordinaatit ovat

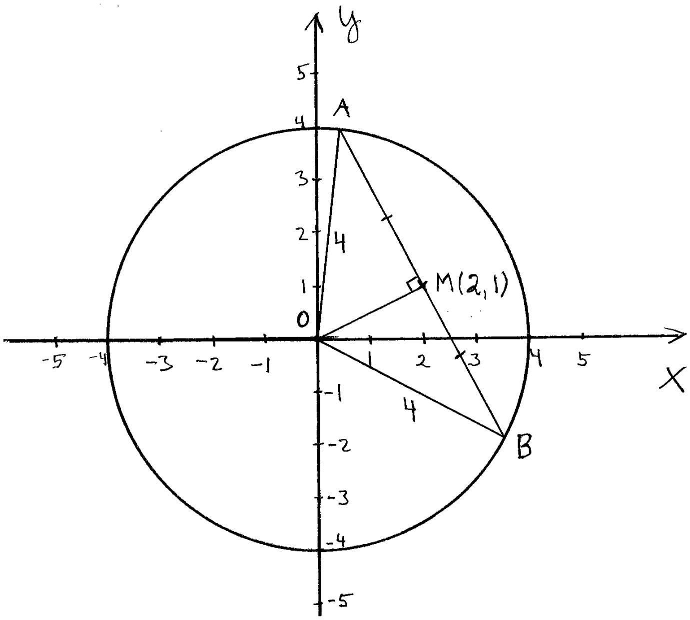
$$B=\left(1-\frac{12}{5},2+\frac{9}{5}\right) \quad \text{tai} \quad B=\left(1+\frac{12}{5},2-\frac{9}{5}\right)$$

$$\underline{\underline{B=\left(-\frac{7}{5},\frac{19}{5}\right) \quad \text{tai} \quad B=\left(\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)}}$$

1p
(6p)

5. Ympyrän $x^2 + y^2 = 16$ jänteen keskipiste on $(2, 1)$. Määritä jänteen pituus.

Ratkaisu. Ympyrä $x^2 + y^2 = 16$ on origokeskinen ja sen säde on 4. Piste $(2, 1)$ on tälle ympyrälle piirretyn jänteen keskipiste. Piirretään kuva



1p

Kolmio ABO on tasakylkinen, sillä sen kylkinä on ympyrän O säteet. Siten kannan AB (jänne) keskipiste M on kolmion ABO korkeusjanan toinen päätepiste ja siis $MO \perp AB$. 1p (2p)

Korkeusjanan MO pituus on

$$|MO| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$|MO| = \sqrt{5}$$

1p (3p)

Kolmio AMO on suorakulmainen. Pythagoraan lauseella saadaan

$$|AM|^2 + |MO|^2 = |AO|^2$$

1p (4p)

$$|AM|^2 + (\sqrt{5})^2 = 4^2$$

$$|AM|^2 = (\pm)\sqrt{16-5}$$

$$|AM| = \sqrt{11}$$

1p (5p)

Jänteen AB pituus on

$$|AB| = 2 \cdot |AM|$$
$$|AB| = 2\sqrt{11}$$

Vastaus: Jänteen pituus on $2\sqrt{11}$.

1p
(6p)

6. Annin pelaamassa tietokonepelissä on 90 % mahdollisuus onnistua.

   a) Kuinka suurella todennäköisyydellä neljän pelin sarjassa tulee tarkalleen yksi epäonnistuminen?
   b) Mikä on neljän pelin sarjassa onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo?
   c) Kuinka monta kertaa Annin täytyy pelata, jotta onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo olisi vähintään 10?

Ratkaisu. Yksittäinen tietokonepeli onnistuu todennäköisyydellä

$$p = 0{,}9$$

ja epäonnistuu todennäköisyydellä

$$q = 1 - p = 0{,}1$$

a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Pelit ovat toisistaan riippumattomia, joten kyseessä on toistokoe. Todennäköisyys, että neljässä pelissä tapahtuu yksi epäonnistuminen on 1p

$$\begin{aligned} P(1 \text{ epäonnistuminen}) &= \binom{4}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot (1 - 0{,}1)^3 \\ &= 0{,}2916 \\ &\approx \underline{\underline{29{,}2\%}} \end{aligned}$$

1p (2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

A: ”Neljän pelin sarjassa täsmälleen yksi epäonnistuminen”

$$\begin{aligned} P(A) &= qppp + pqpp + ppqp + pppq \\ P(A) &= 4 \cdot qppp \\ P(A) &= 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 \\ P(A) &= 0{,}2916 \\ &\approx \underline{\underline{29{,}2\,\%}} \end{aligned}$$

1p

1p (2p)

b)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Pelit ovat toisistaan riippumattomat, joten voitot noudattavat binomijakaumaa. Binomijakauman odotusarvo on

1p (3p)

$$E(X) = np = 4 \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{3{,}6}}.$$

1p (4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Binomitodennäköisyys $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, missä $n = 4$. Satunnaismuuttuja X on onnistuneiden pelien lukumäärä.

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= q^4 = 0{,}1^4 = 0{,}0001 \\
P(X = 1) &= \binom{4}{1} \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}0036 \\
P(X = 2) &= \binom{4}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0486 \\
P(X = 3) &= \binom{4}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}2916 \\
P(X = 4) &= 0{,}9^4 = 0{,}6561
\end{aligned}$$

1p (3p)

Kysytty odotusarvo

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0{,}0001 \cdot 0 + 0{,}0036 \cdot 1 + 0{,}0486 \cdot 2 + 0{,}2916 \cdot 3 + 0{,}6561 \cdot 4 \\
E(X) &= \underline{\underline{3{,}6}}
\end{aligned}$$

1p (4p)

c) Kyseessä on siis binomitodennäköisyys, missä n on pelien lukumäärä. Binomijakauman odotusarvo on np. Oltava siis

$$\begin{aligned}
np &\geq 10 \\
n \cdot 0{,}9 &\geq 10 \quad \| : 0{,}9 \\
n &\geq 11{,}111\ldots
\end{aligned}$$

1p (5p)

Vastaus: <u>Annin täytyy pelata vähintään 12 kertaa.</u>

1p (6p)

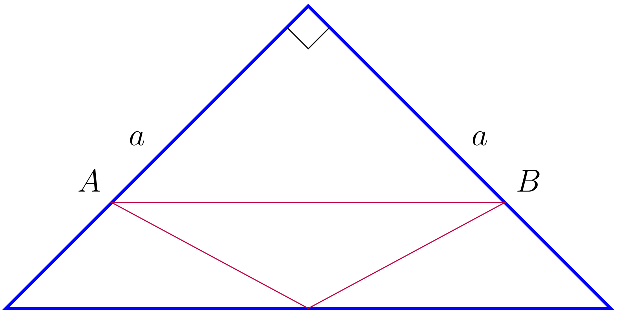
Jos et muista binomijakauman odotusarvon kaavaa $E = np$, tai et löydä sitä taulukkokirjasta, voit myös ratkaista tehtävän näin:

Osoita vastaavalla laskelmalla kuin b-kohdassa, että pelien määrän ollessa 11 odotusarvo on 9,9 ja määrän ollessa 12 odotusarvo on 10,8. Näin ollen pelejä täytyy olla 12 tai enemmän, jotta onnistuneiden pelien määrän odotusarvo on vähintään 10.

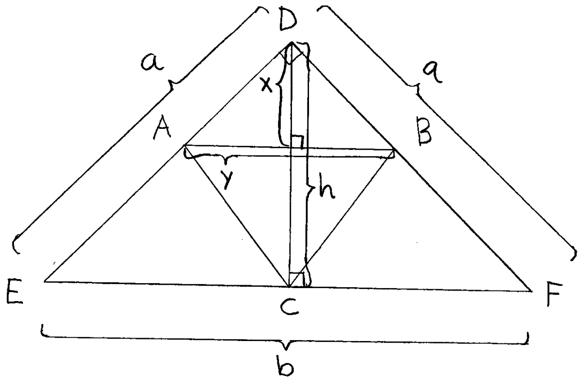
Mistä sitten voi keksiä, että pelejä tulee olla juuri 12, ettei tarvitsisi testata suurta määrää vaihtoehtoja? Voiton todennäköisyys on 0,9, joten Anni voittaa pitkällä juoksulla keskimäärin 9 peliä kymmenestä. Jos Anni pelaa n peliä, hän voittaa siis keskimäärin niistä $0{,}9n$. Tämän perusteella voidaan arvioida, kuinka monta peliä tulee pelata, että voittaa niistä keskimäärin 10.

$$\begin{aligned} 0{,}9n &= 10 \quad \| : 0{,}9 \\ n &= 11{,}11\ldots \end{aligned}$$

7. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kateetin pituus on a. Kolmion sisälle asetetaan kuvion mukaisesti pienempi tasakylkinen kolmio, jonka yksi kärki sijaitsee alkuperäisen kolmion hypotenuusalla. Lisäksi jana AB on hypotenuusan suuntainen. Määritä pienemmän kolmion suurin mahdollinen pinta-ala. Määritä pienemmän kolmion suurin mahdollinen pinta-ala.



Ratkaisu. Mallikuva



Pythagoraan lauseella $b = \sqrt{2}a$ ja $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Kolmiot ABD ja EFD ovat yhdenmuotoiset (kk), joten $\frac{x}{h} = \frac{y}{b}$. Kolmion ABC pinta-ala on 1p

$$\begin{aligned}
\frac{y\cdot(h-x)}{2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{xb}{h}\cdot(h-x) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}a}{a/\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right) \\
&= -x^2+\frac{a}{\sqrt{2}}x
\end{aligned}$$

1p (2p)

Pinta-alalle saadaan siis lauseke:

$$f(x) = -x^2 + \frac{a}{\sqrt{2}}x, \quad x \in \left]0, \tfrac{a}{\sqrt{2}}\right[$$

1p (3p)

Funktio f on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen maksimi löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivaatan nollakohta on

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x + \frac{a}{\sqrt{2}} &= 0 \\ x &= \frac{a}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

1p (4p)

Funktion f arvo derivaatan nollakohdassa on

$$f\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2}{8}.$$

1p (5p)

Vastaus: Suurin mahdollinen pinta-ala on $\frac{a^2}{8}$.

1p (6p)

8. Erään kaivoksen kivihiilivarojen laskettiin vuoden 2015 alussa riittävän 50 vuodeksi, jos louhintatahti (yksikkönä tonnia/vuosi) pysyy samana. Minä vuonna kivihiilivarat loppuvat, jos louhintaa lisätään joka vuosi 2,5 % edelliseen vuoteen verrattuna?

Ratkaisu. Olkoon mainittujen laskelmien pohjana oleva louhintatahti vuonna 2015 a tonnia/vuosi. Koska kaivoksen kivihiilivarat riittävät 50 vuodeksi, kaivoksessa on vuoden 2015 alussa $50a$ tonnia kivihiiltä. 1p

Koska eletään vuoden 2015 alkua, viimeisin tiedossa oleva louhintatahti on vuonna 2014 toteutunut. Tulkitaan tehtävänantoa niin, että edellä mainittu a on sama kuin viimeisin toteutunut tahti, eli vuoden 2014 louhintatahti. Jos joka vuosi louhitaan 2,5 % enemmän kuin edellisenä vuonna, niin vuonna 2015 louhintahti on $1{,}025a$ ja yleisesti n:nnen vuoden aikana louhitaan $1{,}025^n \cdot a$ tonnia kivihiiltä. Selvitetään milloin kivihiili loppuu.

$$
\begin{aligned}
1{,}025a + 1{,}025^2a + \cdots + 1{,}025^na &\geq 50a && \text{1p (2p)}\\
1{,}025a \cdot \frac{1-1{,}025^n}{1-1{,}025} &\geq 50a && \text{1p (3p)}\\
\frac{1{,}025}{0{,}025}(1{,}025^n - 1) &\geq 50\\
1{,}025^n &\geq \frac{91}{41} && \text{1p (4p)}\\
n &\geq \frac{\ln \frac{91}{41}}{\ln 1{,}025} = 32{,}28\ldots && \text{1p (5p)}
\end{aligned}
$$

Tästä saadaan, että kivihiili loppuu 33 vuoden aikana, eli vuonna 2047. 1p (6p)

Huomautus: Harmittavasti tehtävänanto ei ole tulkittavissa yksikäsitteisesti. Ilmaus ”jos louhintatahti pysyy samana” tarkoittaa, että louhintatahti on vuonna 2015 jokin luku a ja sen jälkeisinä vuosina kunakin sama a. Jälkimmäinen vaihtoehto ”jos louhintaa lisätään joka vuosi 2,5 % edelliseen vuoteen verrattuna” tarkoittaa, että louhintatahti on vuonna 2015 jokin luku b ja sen jälkeisinä vuosina $1{,}025b; 1{,}025^2b; 1{,}025^3b, \ldots$ jne. Luvun b suuruudesta ei ole kuitenkaan mitään tietoa, eikä siitä, miten se suhtautuu lukuun a.

Tällaisessa tilanteessa ei tietenkään kannata lähteä saivartelemaan, koska pisteiden saamiseksi tehtävään pitäisi saada laskettua jokin vastaus. Näin ollen hyvä toimintatapa koetilanteessa on tehdä hyväntahtoinen tulkinta tehtävänannosta ja selittää valittu tulkinta ratkaisun yhteydessä. Tässä tehtävässä ongelmana on, että hyväntahtoisia tulkintoja on kaksi ja on vaikea sanoa, kumpi niistä on se, mitä tehtävän laatija on ajatellut.

Tulkinta 1: Koska tehtävänannon jälkimmäisessä tilanteessa sanotaan, että ”louhintaa lisätään joka vuosi 2,5 % edelliseen vuoteen verrattuna” ja eletään vuoden 2015 alkua, on luonnollista olettaa, että vuonna 2015 louhintatahti on 2,5 % suurempi kuin vuonna 2014. Jos vuoden 2014 louhintatahti oli c, niin vuodesta 2015 alkaen louhintatahti on $1{,}025c; 1{,}025^2c; 1{,}025^3c; \ldots$. Miten tämä c sitten suhtautuu lukuun a, jolla tarkoitamme louhintatahtia tilanteessa ”jos louhintatahti pysyy samana”? Jos oletetaan, että louhintatahti ”pysyy samana” ja eletään vuosien 2014 ja 2015 vaihdetta, niin tuntuu luonnolliselta olettaa, että ennustetta tehdessä lähdetään siitä, että tuo samana pysyvä louhintatahti vuodesta 2015 alkaen on myös sama kuin viimeksi toteutunut, eli vuoden 2014 louhintatahti. Tästä saadaan $a = c$ ja siten:

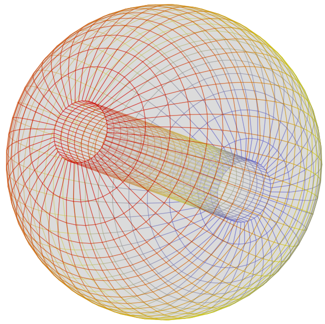
- Jos louhintatahti pysyy samana, ovat louhitut määrät vuodesta 2015 alkaen $a, a, a, \ldots$.
- Jos louhintatahti kasvaa joka vuosi 2,5 %, ovat louhitut määrät vuodesta 2015 alkaen $1{,}025a; 1{,}025^2a; 1{,}025^3a; \ldots$.

Tulkinta 2: Oletetaan, että kaivostoiminta alkaa vuoden 2015 alusta. Tällöin ennusteen tekijä arvioi vuoden 2015 louhintatahdiksi määrän a ja

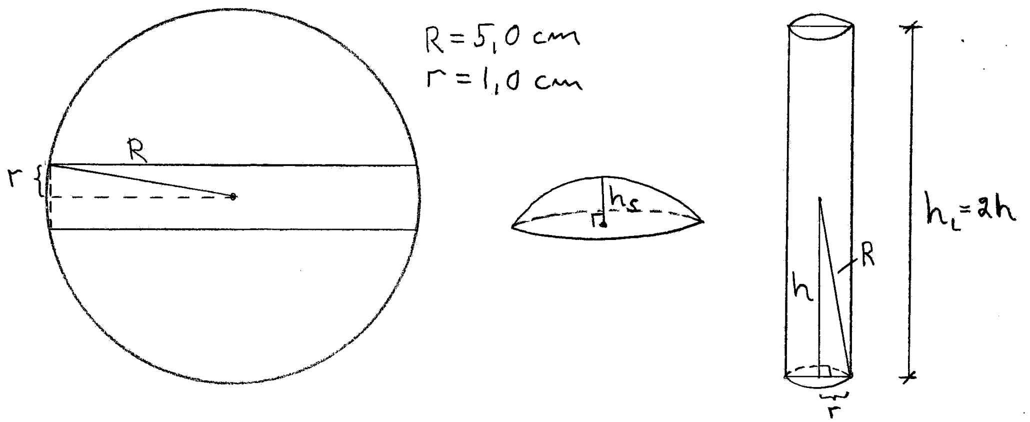
- jos louhintatahti pysyy samana, ovat louhitut määrät vuodesta 2015 alkaen $a, a, a, \ldots$, tai
- jos louhintatahti kasvaa joka vuosi 2,5 %, ovat louhitut määrät vuodesta 2015 alkaen $a; 1{,}025a; 1{,}025^2a; \ldots$.

Edellä esitetty malliratkaisu perustuu tulkintaan 1. Tulkinnan 2 mukaan saadaan eri arvo $n \geq 32{,}841\ldots$, mutta luvut ovat niin lähellä toisiaan, että vastaus on edelleen ”vuoden 2047 aikana”. Uskomme, että kummalla tahansa tulkinnalla on mahdollista saada täydet pisteet.

9. Täysin pyöreän geenimanipuloidun omenan säde on 5,0 cm. Omenan läpi porataan sen keskeltä kulkeva reikä, jonka säde on 1,0 cm. Kuinka monta prosenttia omenan tilavuudesta tällöin haviää? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.



Ratkaisu. Mallikuva:



Lasketaan reiän tilavuus. Reikä koostuu lieriöstä ja kahdesta identtisestä pallosegmentistä. Pythagoraan lauseella

$$h^2 + r^2 = R^2$$
$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$ 1p

Nyt saadaan

$$h_L = 2h = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Lisäksi

$$2h_S + 2h_L = 2R \quad \text{(pallon halkaisija)},$$

joten

$$h_S = R - \frac{1}{2}h_L = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

1p (2p)

Lieriön tilavuus on

$$V_L = \pi r^2 \cdot h_L = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

1p (3p)

Segmentin tilavuus on

$$V_S = \pi h_S^2 \left(R - \frac{h_S}{3}\right) = \pi(R - \sqrt{R^2 - r^2})^2 \left(R - \frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{3}\right)$$

1p (4p)

Reiän tilavuus on $V_L + 2V_S$, joten kysytty osuus voidaan nyt laskea:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{\text{reikä}}}{V_{\text{pallo}}} &= \frac{V_L + 2V_S}{V_{\text{pallo}}} \\
&= \frac{2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} + 2\pi(R - \sqrt{R^2 - r^2})^2\left(R - \frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{3}\right)}{\frac{4\pi}{3}R^3} \\
&= \frac{2\pi 1{,}0^2\sqrt{5{,}0^2 - 1{,}0^2} + 2\pi(5{,}0 - \sqrt{5{,}0^2 - 1{,}0^2})^2\left(5{,}0 - \frac{5{,}0 - \sqrt{5{,}0^2 - 1{,}0^2}}{3}\right)}{\frac{4\pi}{3} \cdot 5{,}0^3} \\
&= 0{,}05939\ldots \\
&\approx \underline{\underline{5{,}9\,\%}}
\end{aligned}$$

1p (5p)

1p (6p)

10. a) Suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituudet $a < b < c$ muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon suhdeluku q.
b) Suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituudet $a < b < c$ muodostavat aritmeettisen jonon. Määritä suhde $a : b : c$.

Ratkaisu. Suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c, joille pätee suuruusjärjestys $a < b < c$. Pythagoraan lauseen nojalla

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

a) Sivut muodostavat geometrisen jonon, jonka täytyy suuruusjärjestyksen takia olla joko

1. a, b, c tai
2. c, b, a.

Ratkaistaan ensin tapaus 1. Jono on geometrinen, joten

$$\begin{aligned} b &= qa \quad \text{ja} \\ c &= qb = q^2a, \ \text{missä } q > 0. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} a^2 + (qa)^2 &= (q^2a)^2 \\ a^2 + q^2a^2 &= q^4a^2 \quad \| : a^2 \\ 1 + q^2 &= q^4 \\ q^4 - q^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

1p

Merkitään $z = q^2$.

$$z^2 - z - 1 = 0. \tag{3}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ z &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

eli suhdeluku q on joko

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ q &= \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

tai

$$q^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{ei kelpaa.}$$

1p (2p)

Tapauksessa 2 jono on c, b, a, joten

$$\begin{aligned} b &= qc \\ a &= qb = q^2c, \text{ missä } q > 0. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} (q^2c)^2 + (qc)^2 &= c^2 \\ q^4c^2 + q^2c^2 &= c^2 \quad \| : c^2 \\ q^4 + q^2 &= 1 \quad \| : q^4 \\ 1 + \frac{1}{q^2} &= \frac{1}{q^4} \end{aligned}$$

Merkitään $z = \frac{1}{q}$.

$$\begin{aligned} 1 + z^2 &= z^4 \\ z^4 - z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Huomataan, että tämä on sama kuin yhtälö (2), joten aiemman laskun perusteella

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ \frac{1}{q} &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ q &= \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

1p (3p)

Vastaus: Mahdolliset suhdeluvut ovat $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ tai $q = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$.

b) Suuruusjärjestyksen takia mahdolliset lukujonot ovat a-kohdan tavoin

1. a, b, c ja
2. c, b, a.

Merkitään perättäisten jäsenten erotusta d:llä. Jono on aritmeettinen, joten molemmissa tapauksissa

$$\begin{aligned} a &= b - d \\ c &= b + d, \text{ missä } d > 0. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} (b-d)^2 + b^2 &= (b+d)^2 \\ b^2 - 2bd + d^2 + b^2 &= b^2 + 2bd + d^2 \\ b^2 &= 4bd \quad \| : b \\ b &= 4d \quad \| : d \\ \frac{b}{d} &= 4. \end{aligned}$$

1p (4p)

1p (5p)

Näin ollen sivujen pituuksien suhteet ovat

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b-d}{b} = \frac{\frac{b}{d} - 1}{\frac{b}{d}} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \quad \| \cdot \frac{4}{3}b \\ b &= \frac{4}{3}a \\ \frac{b}{c} &= \frac{b}{b+d} = \frac{\frac{b}{d}}{\frac{b}{d} + 1} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} \quad \| \cdot \frac{5}{4}c \\ c &= \frac{5}{4}b = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3}a = \frac{5}{3}a. \end{aligned}$$

Vastaus: Sivujen pituuksien suhteet ovat $a : b : c = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$.

1p (6p)

11. Millä numeron n arvoilla 10-järjestelmän luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla

a) 3
b) 6
c) 9?

Ratkaisu.

a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Luonnollinen luku on tunnetusti jaollinen kolmella, jos ja vain jos sen numeroiden summa on myös jaollinen kolmella. Luvun $12n34n567n89n$ numeroiden summa on

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+4n = 45+4n = 3(15+n)+n.$$

1p

$3(15+n)$ on jaollinen luvulla 3, joten $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun n on, eli kun n kuuluu joukkoon $\{0,3,6,9\}$.

1p (2p)

Vastaus: $\underline{\underline{12n34n567n89n \text{ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun } n = 0,\ 3,\ 6 \text{ tai } 9.}}$

RATKAISUVAIHTOEHTO 2

$$\begin{aligned}
12n34n567n89n &= 1\cdot 10^{12} + 2\cdot 10^{11} + n\cdot 10^{10} + \cdots + n\cdot 10^{0} \\
&= 1\cdot(9+1)^{12} + 2\cdot(9+1)^{11} + n\cdot(9+1)^{10} + \cdots + n\cdot 1 \\
&\equiv 1\cdot 1^{12} + 2\cdot 1^{11} + n\cdot 1^{10} + \cdots + n\cdot 1 \pmod 3 \\
&= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + n\cdot 1 + \cdots + n\cdot 1 \\
&= 45 + 4n \\
&\equiv 4n \pmod 3 \\
&= 3n + n \\
&\equiv n \pmod 3 \\
&\equiv 0 \pmod 3,
\end{aligned}$$

1p

jos ja vain jos n on jaollinen luvulla 3, joten $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun n on, eli kun n kuuluu joukkoon $\{0,3,6,9\}$.

1p (2p)

Vastaus: $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun $n = 0, 3, 6$ tai 9.

b) Koska $6 = 2 \cdot 3$ ja luvut 2 ja 3 ovat keskenään jaottomia, luonnollinen luku on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun se on jaollinen sekä luvulla 2 että luvulla 3. Luku $12n34n567n89n$ on luonnollinen luku, joten a-kohdan nojalla n täytyy olla jaollinen luvulla 3. Lisäksi luku $12n34n567n89n$ on jaollinen kahdella, jos ja vain jos sen viimeinen numero, eli n, on parillinen. 1p (3p)

Näin ollen luvun n täytyy siis olla jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 2, eli sen täytyy kuulua joukkoon $\{0, 6\}$. 1p (4p)

Vastaus: $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun $n = 0$, tai 6.

c)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1

Luonnollinen luku on tunnetusti jaollinen yhdeksällä, jos ja vain jos sen numeroiden summa on myös jaollinen yhdeksällä. Luvun $12n34n567n89n$ numeroiden summa on a-kohdan nojalla

$$45 + 4n = 9 \cdot 5 + 4n.$$ 1p (5p)

$9 \cdot 5$ on jaollinen luvulla 9, joten $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun $4n$ on. 4 ja 9 ovat keskenään jaottomat, joten tämä toteutuu, kun n on jaollinen luvulla 9, eli kuuluu joukkoon $\{0, 9\}$. 1p (6p)

Vastaus: $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun $n = 0$ tai 9.

Ratkaisuvaihtoehto 2

$$\begin{aligned}
12n34n567n89n &= 1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{11} + n \cdot 10^{10} + \cdots + n \cdot 10^{0} \\
&= 1 \cdot (9+1)^{12} + 2 \cdot (9+1)^{11} + n \cdot (9+1)^{10} + \cdots + n \cdot 1 \\
&\equiv 1 \cdot 1^{12} + 2 \cdot 1^{11} + n \cdot 1^{10} + \cdots + n \cdot 1 \pmod 9 \\
&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + n \cdot 1 + \cdots + n \cdot 1 \\
&= 45 + 4n \\
&\equiv 4n \pmod 9 \\
&\equiv 0 \pmod 9,
\end{aligned}$$

1p (5p)

jos ja vain jos $4n$ on jaollinen luvulla 9. Koska 4 ja 9 ovat keskenään jaottomia, niin $4n$ on jaollinen luvulla 9 täsmälleen silloin, kun n on jaollinen luvulla 9, eli kuuluu joukkoon $\{0, 9\}$.

1p (6p)

Vastaus: $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 9 täsmälleen silloin, kun $n = 0$ tai 9.

12. Polynomi $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x + b$ on jaollinen binomeilla $x - 1$ ja $x + 3$. Ratkaise yhtälö $P(x) = 0$.

Ratkaisu.

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x + 6$$

on kolmannen asteen polynomi ja jaollinen binomeilla $x - 1$ ja $x + 3$, joten

$$P(x) = A(x + B)(x - 1)(x + 3),$$

1p

missä A ja B ovat joitakin reaalilukuja.

$$\begin{aligned}
2x^3 + ax^2 - 4x + b &= A(x + B)(x - 1)(x + 3)\\
2x^3 + ax^2 - 4x + b &= A(x + B)(x^2 + 2x - 3)\\
2x^3 + ax^2 - 4x + b &= A(x^3 + (B + 2)x^2 + (2B - 3)x - 3B)\\
2x^3 + ax^2 - 4x + b &= Ax^3 + A(B + 2)x^2 + A(2B - 3)x - 3AB
\end{aligned}$$

1p (2p)

1p (3p)

Kolmannen asteen termeistä nähdään, että $A = 2$, joten ensimmäisen asteen termeistä saadaan

$$\begin{aligned}
A(2B - 3) &= -4 \qquad \| \text{ Sij. } A = 2\\
2(2B - 3) &= -4\\
4B - 6 &= -4\\
4B &= 2 \qquad \| : 4\\
B &= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

1p (4p)

eli $P(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1)(x + 3)$, joten tulon nollasäännön nojalla yhtälö $P(x) = 0$ toteutuu, kun

1p (5p)

$$x + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x = 1 \qquad\qquad x = -3$$

Vastaus: $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ tai $x = -3$.

1p (6p)

13. a) Anna esimerkki rajoitetusta lukujonosta, joka ei suppene. Perustele väitteesi.
b) Anna esimerkki vähenevästä lukujonosta, joka ei ole rajoitettu. Perustele väitteesi.
c) Määritä jokin sellainen luku $p > 0$, että funktion $f(x) = x^{-p}$ epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

suppenee, mutta epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \sqrt{f(x)}\,dx$$

hajaantuu.

Ratkaisu.

a) Kysytty lukujono voi olla esimerkiksi (a_n), missä

$$a_n = (-1)^n, \text{ kun } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

eli lukujono

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$ 1p

Lukujono (a_n) ei suppene, sillä sen jäsenet eivät lähesty mitään reaalilukua, kun $n \to \infty$, mutta on rajoitettu, sillä $|a_n| \leq 1$ kaikilla n. 1p (2p)

b) Kysytty lukujono voi olla esimerkiksi (b_n), missä

$$b_n = -n, \text{ kun } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

eli lukujono

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots$$ 1p (3p)

Lukujono (b_n) on vähenevä, sillä

$$b_{n+1} = -(n+1) = -n - 1 = b_n - 1 < b_n,$$

mutta ei rajoitettu, sillä

$$b_n = -n \to -\infty, \text{ kun } n \to \infty.$$ 1p (4p)

c)

$$p > 0, \quad f(x) = x^{-p}$$

Tarkastellaan tilannetta $p = 2$.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \Big/_{1}^{\infty} -x^{-1} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)}_{0} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1,$$

eli integraali $\int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenee, kun $p = 2$. 1p (5p)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \sqrt{f(x)}\,dx &= \int_1^\infty \sqrt{x^{-2}}\,dx = \int_1^\infty x^{-1}\,dx \\ &= \Big/_{1}^{\infty} \ln|x| = \lim_{x\to\infty}(\ln|x|) - \underbrace{\ln(1)}_{0} \\ &= \infty,\end{aligned}$$

eli integraali $\int_1^\infty \sqrt{f(x)}\,dx$ hajaantuu, kun $p = 2$. Täten luku $p = 2$ toteuttaa ehdot. 1p (6p)

Huom! Ehdot toteutuvat millä tahansa $p \in\ ]1, 2]$ ja mikä tahansa p:n arvo tältä väliltä kelpaa täysien pisteiden saamiseksi, kunhan tulos on perusteltu ja laskelmat ovat oikein.

*14. Olkoot $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$. Tarkastellaan avaruuden suoraa S, joka kulkee origon ja pisteen (a, b, c) kautta. Suoran S suunta voidaan ilmoittaa kolmen suuntakosinin avulla. Suuntakosinit $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ ovat vektorin $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ ja yksikkövektoreiden $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ välisten kulmien α, β ja γ kosineita.

a) Laske suoran
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$$
suuntakosinit. (3 p.)

b) Laske a-kohdan suuntakosinien neliöiden summa. (2 p.)

c) Määritä vastaavat suuntakulmat α, β ja γ asteen kymmenesosan tarkkuudella. (2 p.)

d) Osoita, että b-kohdan tulos on sama kaikille tehtävän alkuosan ehdot toteuttaville suorille. (2 p.)

Ratkaisu.

a) Tarkastellaan suoraa $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$. Annettu suora kulkee origon ja pisteen $(2, 3, 7)$ kautta, koska
$$\frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{7} \quad \text{ja} \quad \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{7}{7}$$
ja pisteet toteuttavat siis suoran yhtälön.
Lasketaan vektorin $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$ ja yksikkövektorien $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ välisten kulmien kosinit: 1p

$$\cos\alpha = \frac{\bar{v}\cdot\bar{i}}{\|\bar{v}\|\|\bar{i}\|} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 7\cdot 0}{\sqrt{2^2+3^2+7^2}\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{62}}}}$$
$$\cos\beta = \frac{\bar{v}\cdot\bar{j}}{\|\bar{v}\|\|\bar{j}\|} = \frac{2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 7\cdot 0}{\sqrt{2^2+3^2+7^2}\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{62}}}}$$
$$\cos\gamma = \frac{\bar{v}\cdot\bar{k}}{\|\bar{v}\|\|\bar{k}\|} = \frac{2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 7\cdot 1}{\sqrt{2^2+3^2+7^2}\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{62}}}}$$
2p (3p)

b)
$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \left(\frac{2}{\sqrt{62}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{62}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{62}}\right)^2 \\ &= \frac{4+9+49}{62} \\ &= \underline{\underline{1}}\end{aligned}$$
2p (5p)

c)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{2}{\sqrt{62}}\\
\alpha &= 75{,}285\ldots^\circ \approx \underline{\underline{75{,}3^\circ}}\\
\cos\beta &= \frac{3}{\sqrt{62}}\\
\beta &= 67{,}604\ldots^\circ \approx \underline{\underline{67{,}6^\circ}}\\
\cos\gamma &= \frac{7}{\sqrt{62}}\\
\gamma &= 27{,}252\ldots^\circ \approx \underline{\underline{27{,}3^\circ}}
\end{aligned}$$

2p (7p) yksi kulma väärin $-1p$

d) Olkoot $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$, ja lasketaan suuntakosinit vektorille $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\bar{v}\cdot\bar{i}}{\|\bar{v}\|\|\bar{i}\|} = \frac{a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}}\\
\cos\beta &= \frac{\bar{v}\cdot\bar{j}}{\|\bar{v}\|\|\bar{j}\|} = \frac{a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}}\\
\cos\gamma &= \frac{\bar{v}\cdot\bar{k}}{\|\bar{v}\|\|\bar{k}\|} = \frac{a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}}
\end{aligned}$$

1p (8p)

Lasketaan nyt suuntakosinien neliöiden summa.

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\tfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2\\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

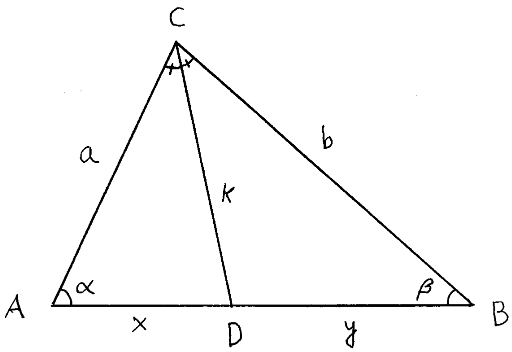
Suuntakosinien neliöiden summa on siis aina 1. $\square$

1p (9p)

*15. Kolmion kahden sivun pituudet ovat $CA = a$ ja $CB = b$. Näiden sivujen välisen kulman puolittajasta kolmion sisälle jäävän osan pituus on k. Puolittaja jakaa kolmannen sivun kahteen osaan, joiden pituudet ovat $AD = x$ ja $DB = y$. Osoita, että $k = \sqrt{ab - xy}$,

a) kun $a = b$. (3 p.)
b) kun $a \neq b$. (6 p.)

Ratkaisu. Mallikuva:



a) Jos $a = b$, kolmio on tasakylkinen. Silloin $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA$, joten kolmiot ADC ja BDC ovat yhtenevät (ksk). Siten $x = y$ ja kulma $\sphericalangle CDA$ on suora. Pythagoraan lauseella $b^2 + x^2 = a^2$, eli $k = \sqrt{a^2 - x^2}$. Koska $a = b$ ja $x = y$, niin $k = \sqrt{ab - xy}$. □

1p
1p
1p (3p)

b) Kulmanpuolittajalauseen nojalla $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = s$, jolloin $b = sa$ ja $y = sx$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABC, ja ratkaistaan $\cos\alpha$.

$$b^2 = a^2 + (x+y)^2 - 2a(x+y)\cos\alpha$$

1p (4p)

$$2a(x+y)\cos\alpha = a^2 - s^2a^2 + (x+sx)^2$$

$$\cos\alpha = \frac{(1-s^2)a^2 + (1+s)^2x^2}{(1+s)\cdot 2ax} = \frac{(1-s)a^2 + (1+s)x^2}{2ax}$$

1p (5p)

Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ADC

$$\begin{aligned}
k^2 &= a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha \\
&= a^2 + x^2 - 2ax\frac{(1-s)a^2 + (1+s)x^2}{2ax} \\
&= a^2 + x^2 - (1-s)a^2 - (1+s)x^2 \\
&= sa^2 - sx^2 \\
&= a \cdot sa - x \cdot sx \\
&= ab - xy.
\end{aligned}$$

2p (7p)

1p (8p)

Näin ollen $k = \sqrt{ab - xy}$. $\square$

1p (9p)