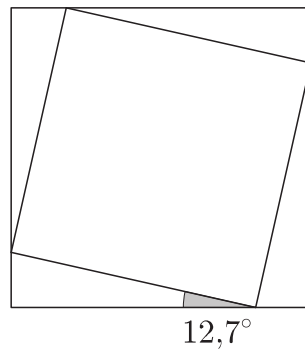



B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Jos teet tehtävän 5, kirjoita sen ratkaisu kokoarkille. Muussa tapauksessa kirjoita kokoarkille vain nimitietosi. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Puoliarkit kootaan kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Kuinka monta prosenttia kuvassa olevan pienemmän neliön sivun pituus on suuremman neliön sivun pituudesta? Kuinka monta prosenttia pienemmän neliön pinta-ala on suuremman neliön pinta-alasta? Suuremman neliön sivun pituus on 1.



6. Ympyräsektorin säde on 3 ja keskuskulman suurus on α . Sektori taivutetaan ympyräpohjaisen kartion vaipaksi. Mikä on kulman α tarkka arvo silloin, kun kartion tilavuus on mahdollisimman suuri?



Lähde: <<http://cliparts.co/>>. Luettu 8.4.2016.

7. Tavallista noppaa heitetään kolme kertaa, jolloin saadaan heittojärjestyksessä luvut a, b, c . Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:

- a) Jono (a, b, c) on aidosti kasvava ja aritmeettinen.
- b) Jono (a, b, c) on geometrinen.

8. Eksponenttifunktion e^x likiarvoja voidaan laskea n -asteisten polynomien

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

avulla, kun $n = 1, 2, 3, \dots$

- a) Kuinka suuri suhteellinen virhe syntyy, kun Neperin luvun e likiarvona käytetään lukua $P_5(1)$?
- b) Eksponenttifunktion derivaatalle pätee $De^x = e^x$, kun $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että tehtävän polynomeille on voimassa

$$P'_n(x) = P_{n-1}(x)$$

kaikilla $n = 2, 3, 4, \dots$

- c) Määritä pienin mahdollinen asteluku n , jolle

$$|P_n(x) - P'_n(x)| < 10^{-6}$$

kaikilla $0 \leq x \leq 1$. Tarvittavan epäyhtälön voi ratkaista esimerkiksi kokeilemalla.

9. a) Olkoot $a > 0$ ja

$$f(t) = ae^{-at},$$

kun $t \geq 0$. Osoita, että funktio $f(t)$ toteuttaa ehdon

$$\int_0^\infty f(t) dt = 1,$$

jokaisella parametrin a arvolla. Tästä seuraa, että $f(t)$ on erään jatkuvan todennäköisyysjakauman tiheysfunktio. Jakaumaa kutsutaan *eksponenttijakaumaksi*. Huom.: Pelkkä laskin ei riitä perusteluksi.

- b) Eksponenttijakaumalla voidaan kuvata mm. peräkkäisten neutriinohavaintojen välistä aikaa. Eräällä havaintolaitteella peräkkäisten havaintojen väliajan mediaani oli 46,90 minuuttia, eli puolessa tilastoiduista tapauksista väliaika oli tätä pienempi ja puolessa suurempi. Millä parametrin a arvolla tiheysfunktio $f(t)$ kuvaa näitä mitaustuloksia?

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Juha yrittää todistaa seuraavan väitteen: *Jos positiivinen kokonaisluku on jaollinen luvulla 3, niin se on jaollinen luvulla 6.* Hän ehdottaa seuraavaa todistusta:

Oletetaan, että a on jaollinen luvulla 6. Tällöin on olemassa kokonaisluku b , jolle pätee $a = 6b$. Nyt $a = 3 \cdot 2b$. Siksi a on jaollinen luvulla 3.

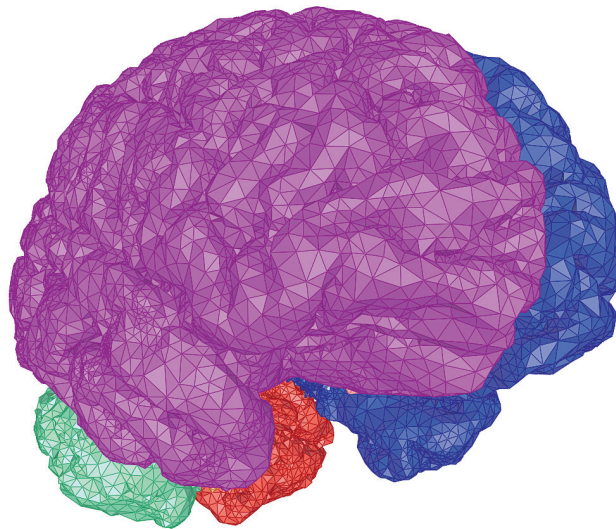
Osoita, että Juhan väite ei pidä paikkaansa. Mikä päättelyssä on väärin? Minkä väitteen Juhan päättely todistaa?

11. Kolmiulotteisissa mallinnusohjelmissa kappaleet esitetään usein kolmioinnin avulla. Tällöin kappaleen pintaa kuvataan suurella määrällä pieniä kolmioita. Jotta voidaan selvittää, mikä kappaleen kohta näkyy tietyistä pisteistä tiettyyn suuntaan katsottuna, täytyy selvittää, mikä kolmio ensimmäisenä tulee vastaan, kun liikutaan katselupisteestä annettuun suuntaan. Vastaa seuraavaan kysymykseen, joka liittyy tähän ongelmaan:

Osuuko origosta vektorin $\bar{s} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ suuntaan lähtevä puolisuora kolmioon, jonka kärkien paikkavektorit ovat

$$\begin{aligned}\bar{a} &= 3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k} \\ \bar{b} &= 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k} \\ \bar{c} &= 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}?\end{aligned}$$

Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä olevan kolmion pisteet ovat muotoa $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, kun $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ja $\alpha + \beta + \gamma = 1$.



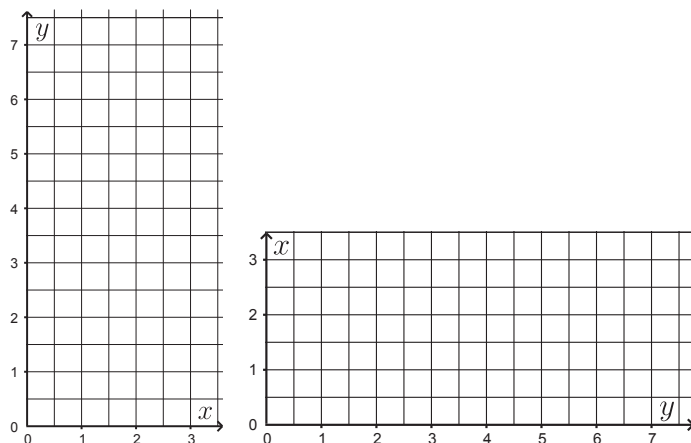
Lähde: <<http://i.cs.hku.hk/~wchu/>>. Luettu 8.4.2016.

12. Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{1}{6}x^3$ ja sen kuvaajaa $y = f(x)$.

a) Kopioi alla olevat koordinaatistot vastauspaperiisi ja piirrä niihin funktion $f(x)$ kuvaaja. Huomaa akselien merkinnät.

b) Laske $f'(2)$ ja $(f^{-1})'(f(2))$.

c) Perustelee graafisesti kaava $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, kun $x \neq 0$.



13. Olkoon $f(x)$ funktio, joka on määritelty välillä $0 \leq x \leq 12$. Alla on esitetty funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12$. Arvioi kuvaajan perusteella

a) määrättyä integraalia $\int_1^4 f(t) dt$

b) millä väleillä funktio $f(x)$ on vakio

c) millä väleillä funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä.

