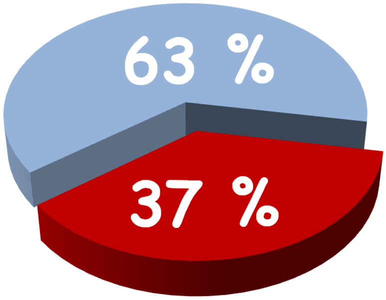
Tiesitkö tätä?

MAFY:n lääkiskurssi 2,2-kertaistaa mahdollisuutesi päästä sisään yhdellä yrityksellä. Poikkeuksellisen kovista tuloksista johtuen lääkikset alkavatkin täyttyä MAFY:n kurssilaisista.



MAFY:n asiakkaat veivät 37 % Helsingin suomenkielisen yleislääkiksen paikoista vuonna 2017.

Lääkiskurssi

- 4–8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa.
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa kemian ja biologian ryhmissä korkeintaan 16 oppilasta yhtä opettajaa kohden ja fysiikassa korkeintaan 11 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa valintasi mukaan 30.10., 8.1., 19.2. tai 27.3. Oppitunnin ajankohdaksi voi yleensä valita aamun, iltapäivän tai illan.
- **Helsinki – Tampere – Jyväskylä**

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 4 täysimittaista harjoituskoetta kustakin aineesta ja pitkällä kurssilla lisäksi 2 yo-harjoituskoetta kustakin aineesta.
- Pitkä kurssi 19.2. - 25.5. ja kevätkurssi 27.3. - 25.5.
- **Helsinki – Jyväskylä**

Pitkä matematiikka, syksy 2017

Mallivastaukset, 25.9.2017

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n Jyväskylän kursseista ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Olli Hirviniemi, Katja Niemistö. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta `www.mafyvalmennus.fi`. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion fysiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
`www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot`

1. a) Laske ja sievennä derivaatta $f'(2)$, kun $f(x) = x^5 + 5x$.
   b) Laske ja sievennä derivaatta $g'(\pi)$, kun $g(x) = \sin(x)$.
   c) Laske ja sievennä derivaatta $h'(2t)$, kun $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Ratkaisu.

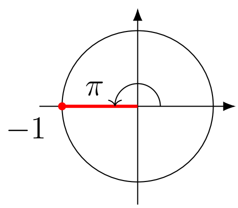
a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^5 + 5x && \text{1p} \\
f'(x) &= 5x^4 + 5 \\
f'(2) &= 5 \cdot 2^4 + 5 \\
&= 5 \cdot 16 + 5 \\
&= 80 + 5 \\
\underline{\underline{f'(2) = 85}} & && \text{1p(2p)}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sin x \\
g'(x) &= \cos x && \text{1p(3p)} \\
g'(\pi) &= \cos \pi \\
\underline{\underline{g'(\pi) = -1}} & && \text{1p(4p)}
\end{aligned}
$$

Lisätieto: Arvon $\cos \pi = -1$ voi päätellä yksikköympyrästä:



c)

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\ln x}{x} \\
h(x) &= x^{-1}\ln x \\
h'(x) &= -x^{-2}\ln x + x^{-1}\cdot\frac{1}{x} \\
h'(x) &= x^{-2}(-\ln x + 1) \\
h'(x) &= \frac{1-\ln x}{x^2} && \text{1p(5p)} \\
h'(2t) &= \frac{1-\ln(2t)}{(2t)^2} \\
h'(2t) &= \frac{1-\ln(2t)}{4t^2} && \text{1p(6p)}
\end{aligned}
$$

2. a) Hannele on ratkaissut yhtälön

$$2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2,$$

mutta välivaiheet ovat menneet sekaisin.

Merkitse välivaiheet (B)–(F) alla olevaan taulukkoon niin, että ne muodostavat yhtälön loogisesti etenevän ratkaisun. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2$

(B) $\boxed{-3x = 1}$

(C) $\boxed{x + 3 = 4(x + 1)}$

(D) $\boxed{x + 3 - 4 - x = 4x + 4 - 4 - x}$

(E) $\boxed{x + 3 = 4x + 4}$

(F) $\boxed{x^2 + x + 3 = 4(x + 1) + x^2}$

(G) $x = -\dfrac{1}{3}$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A						G

b) Myös Pauliinan laskun välivaiheet ovat menneet sekaisin, ja lisäksi mukaan on tullut yksi johonkin muuhun laskuun kuuluva välivaihe.

Tehtävänä on valita alla olevista kohdista (B)–(F) neljä ja järjestää ne niin, että niistä muodostuu yhtälön

$$20 + 4x = x^2 + 8$$

ratkaisu. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $20 + 4x = x^2 + 8$

(B) $\boxed{x^2 - 4x = 12}$

(C) $\boxed{x^2 + 4x + 16 = 0}$

(D) $\boxed{x - 2 = \pm 4}$

(E) $\boxed{x^2 - 4x + 4 = 16}$

(F) $\boxed{(x-2)^2 = 4^2}$

(G) $x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 6$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A					G

Ratkaisu.

a) Lisäselitys: Alla on kirjoitettu yhtälön ratkaisu loogisessa järjestyksessä:

(A) $2(x^2 + x + 3) = 8(x+1) + 2x^2 \quad \| : 2$

(F) $\boxed{x^2 + x + 3 = 4(x+1) + x^2} \quad \| - x^2$

(C) $\boxed{x + 3 = 4(x+1)}$

(E) $\boxed{x + 3 = 4x + 4} \quad \| - 4 - x$

(D) $\boxed{x + 3 - 4 - x = 4x + 4 - 4 - x}$

$-1 = 3x$

(B) $\boxed{-3x = 1} \quad \| : (-3)$

(G) $x = -\dfrac{1}{3}$

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A	F	C	E	D	B	G

3p

Osapisteitä:

Jos oikein ensimmäiset kolme, eli A, F, C, saa 1p.

Jos oikein ensimmäiset viisi, eli A, F, C, E, D, saa 2p.

b) Lisäselitys: Alla on kirjoitettu yhtälön ratkaisu loogisessa järjestyksessä:

$$\begin{array}{ll}
\text{(A)} & 20+4x = x^2+8 \\
 & x^2-4x = 20-8 \\
\text{(B)} & \boxed{x^2-4x=12} \quad \| +4 \\
\text{(E)} & \boxed{x^2-4x+4=16} \\
\text{(F)} & \boxed{(x-2)^2=4^2} \\
\text{(D)} & \boxed{x-2=\pm 4} \\
\text{(G)} & x=-2 \quad \text{tai} \quad x=6
\end{array}$$

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A	B	E	F	D	G

3p

Osapisteitä:

Jos oikein ensimmäiset kolme, eli A, B, E, saa 1p.

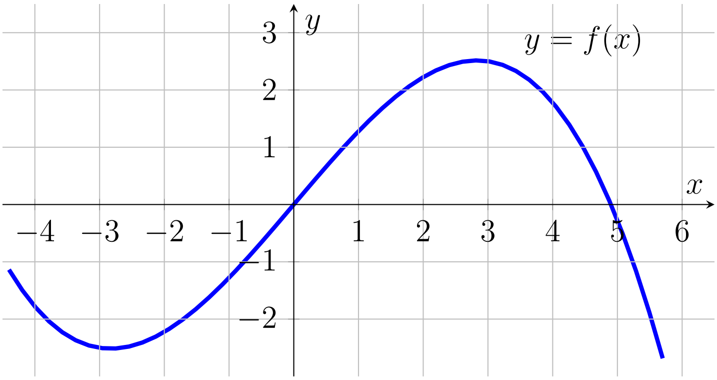
Jos oikein ensimmäiset neljä, eli A, B, E, F, saa 2p.

3. Ratkaise arvioiden oheisen kuvaajan perusteella

   a) yhtälö $|f(x)| = 2$, (2 p.)

   b) epäyhtälö $|f(x) - 1| < 1$. (4 p.)

   Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.



Ratkaisu.

a)

$$|f(x)| = 2$$
$$f(x) = 2 \quad \text{tai} \quad f(x) = -2$$

Luetaan funktion $y = f(x)$ kuvaajasta kohdista $y = 2$ ja $y = -2$ vastaavat muuttujan x arvot.

$$f(x) = 2 \quad \text{kohdissa } x = 1{,}7 \text{ ja } x = 3{,}8$$
$$f(x) = -2 \quad \text{kohdissa } x = -3{,}8;\ x = -1{,}7 \text{ ja } x = 5{,}5$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = -3{,}8 \text{ tai } x = -1{,}7 \text{ tai } x = 1{,}7 \text{ tai } x = 3{,}8 \text{ tai } x = 5{,}5}}$ 2p

3 nollakohtaa oikein 1p, 5 nollakohtaa oikein 2p

b)

$$|f(x) - 1| < 1$$
$$-1 < f(x) - 1 < 1 \quad \| + 1$$
$$0 < f(x) < 2$$ 1p(3p)

Kuvaajasta nähdään, että nämä epäyhtälöt toteutuvat, kun

$$\underline{\underline{0 < x < 1{,}7 \quad \text{tai} \quad 3{,}8 < x < 4{,}9.}}$$ 3p(6p)

4. a) Olkoon $f(t) = \sin(at)$, kun $t \in \mathbb{R}$. Millä vakion $a > 0$ arvolla lausekkeen $|f'(t)|$ suurin arvo on 2?

b) Määritä lauseke funktiolle $g(x)$, jolle pätee $D\left(e^{g(x)}\right) = (6x+1)e^{g(x)}$ ja $g(0) = 3$.

Ratkaisu.

a)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sin(at), \quad \text{kun } t \in \mathbb{R} \\
f'(t) &= a\cos(at) && \text{1p} \\
|f'(t)| &= a|\cos(at)|, \quad \text{kun } a > 0 && \text{1p(2p)}
\end{aligned}
$$

$|\cos(at)|$:n suurin arvo on 1 (esim. kohdassa $t = 0$). Siten funktion $|f'(t)|$ suurin arvo on a ja annettu ehto toteutuu, kun

$$\underline{\underline{a = 2.}} \qquad \text{1p(3p)}$$

b)

$$
\begin{aligned}
D(e^{g(x)}) &= (6x+1)e^{g(x)} \\
g'(x)e^{g(x)} &= (6x+1)e^{g(x)} && \text{1p(4p)} \\
g'(x) &= 6x+1 && \text{1p(5p)} \\
g(x) &= \int 6x + 1 \, dx \\
g(x) &= 3x^2 + x + C
\end{aligned}
$$

Pisteytyksestä: Viides piste tulisi ehkä yleensä vasta tästä. Hyvän vastauksen piirteissä se oli kuitenkin annettu jo aiemmin, joten mekin teimme niin.

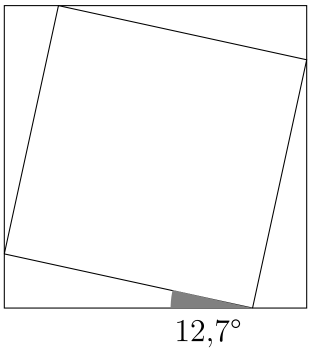
Tällöin

$$g(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 + C = C.$$

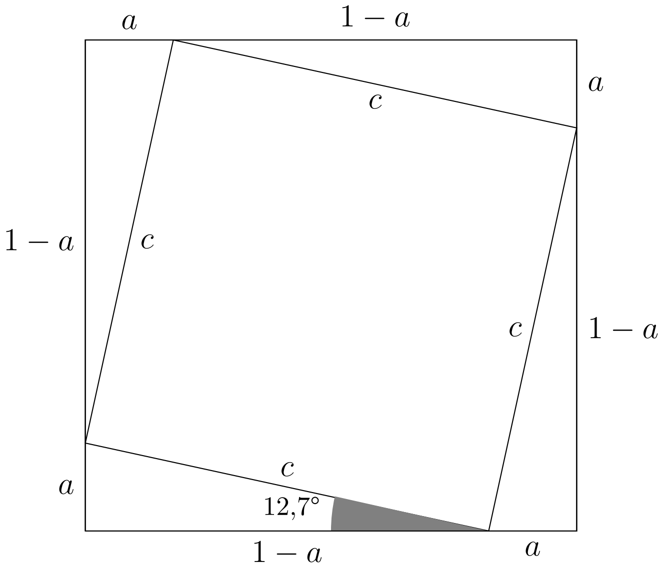
Koska alussa oletettiin, että $g(0) = 3$, niin on pakko olla $C = 3$. Funktion lausekkeeksi saadaan

$$\underline{\underline{g(x) = 3x^2 + x + 3.}} \qquad \text{1p(6p)}$$

5. Kuinka monta prosenttia kuvassa olevan pienemmän neliön sivun pituus on suuremman neliön sivun pituudesta? Kuinka monta prosenttia pienemmän neliön pinta-ala on suuremman neliön pinta-alasta? Suuremman neliön sivun pituus on 1.



Ratkaisu. Suuremman neliön sivun pituus on 1. Merkitään reunoille syntyvien suorakulmaisten kolmioiden lyhyempää kateettia a:lla ja pienemmän neliön sivua c:llä. Saadaan alla oleva kuva



1p

Kolmioiden pidemmät kateetit ovat $1-a$, joten sivu c saadaan pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} a^2 + (1-a)^2 &= c^2 \\ a^2 + 1 - 2a + a^2 &= c^2 \\ c &= \underset{(-)}{+} \sqrt{2a^2 - 2a + 1} \end{aligned} \qquad (1) \qquad \text{1p(2p)}$$

Reunoilla olevista kolmioista saadaan

$$\begin{aligned} \tan 12{,}7^\circ &= \frac{a}{1-a} \qquad \| \cdot (1-a);\ a \neq 1 \qquad \text{1p(3p)} \\ \tan 12{,}7^\circ - a \tan 12{,}7^\circ &= a \\ a &= \frac{\tan 12{,}7^\circ}{1 + \tan 12{,}7^\circ} = 0{,}18391\ldots \qquad (2) \qquad \text{1p(4p)} \end{aligned}$$

Kysyttyjen sivujen %-osuus on (yhtälö (1)):

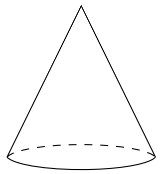
$$\begin{aligned} \frac{c}{1} &= \frac{\sqrt{2a^2 - 2a + 1}}{1} \qquad \|\text{sij. } (2) \\ &= \sqrt{2 \cdot (0{,}18391\ldots)^2 - 2 \cdot (0{,}18391\ldots) + 1} \\ &= 0{,}83655\ldots \\ &\approx 83{,}7\,\% \qquad \text{1p(5p)} \end{aligned}$$

Kysytty pinta-alojen %-osuus:

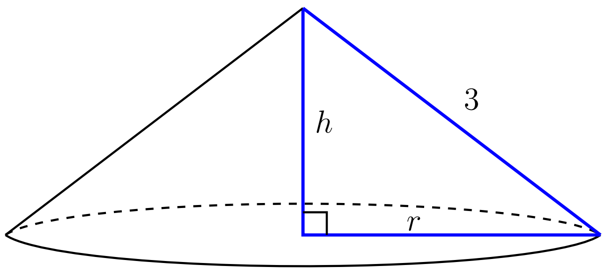
$$\begin{aligned} \frac{c^2}{1^2} &= (0{,}83655\ldots)^2 \\ &= 0{,}69982\ldots \\ &\approx 70{,}0\,\% \qquad \text{1p(6p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Pienemmän neliön sivun pituus on 83,7 % suuremman neliön sivun pituudesta ja pienemmän pinta-ala 70,0 % suuremman pinta-alasta.

6. Ympyräsektorin säde on 3 ja keskuskulman suuruus α. Sektori taivutetaan ympyräpohjaisen kartion vaipaksi. Mikä on kulman α tarkka arvo silloin, kun kartion tilavuus on mahdollisimman suuri.



Ratkaisu. Kun sektori taivutetaan ympyräpohjaisen kartion vaipaksi, muodostuu kartio, jonka sivujanan pituus on 3, korkeus h ja pohjaympyrän säde r.



Pythagoraan lauseesta saadaan

$$\begin{aligned} 3^2 &= h^2 + r^2 \\ 9 &= h^2 + r^2 \\ r^2 &= 9 - h^2 \end{aligned}$$

1p

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}(9 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(9h - h^3)$$

1p(2p)

Tilavuuden derivaatta on

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(9 - 3h^2).$$

1p(3p)

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} V'(h) &= 0 \\ \frac{\pi}{3}(9-3h^2) &= 0 \\ 9-3h^2 &= 0 \\ 3h^2 &= 9 \\ h^2 &= 3 \\ h &= \underset{(-)}{+}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Selvitetään funktion merkki, kun $0 < h < \sqrt{3}$ ja kun $h > \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} V'(1) &= \frac{\pi}{3}(9-3\cdot 1^2) = \frac{\pi}{3}\cdot 6 > 0 \\ V'(2) &= \frac{\pi}{3}(9-3\cdot 2^2) = \frac{\pi}{3}\cdot(-3) < 0 \end{aligned}$$

Piirretään kulkukaavio:

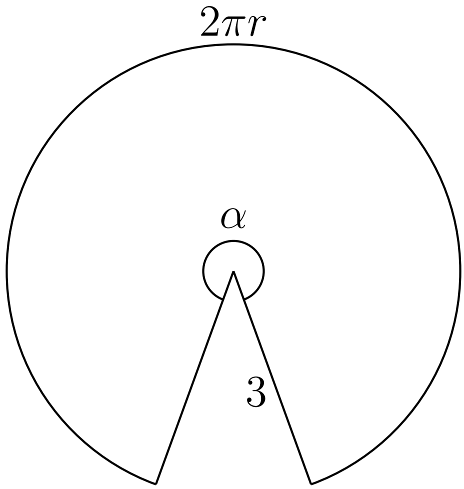
	0	$\sqrt{3}$	
$V'(h)$		+	−
$V(h)$		↗	↘
		max	

Tilavuus on suurin silloin, kun $h = \sqrt{3}$. Tällöin pohjaympyrän säde on 1p(4p)

$$r = \underset{(-)}{+}\sqrt{9-h^2} = \sqrt{9-\sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$$ 1p(5p)

Selvitetään vielä, kuinka suuri vaippasektorin keskuskulma tällöin on.

Sektorin kaaren pituus on pohjaympyrän kehän pituus eli $2\pi r$ ja sektorin säde on kartion sivujana 3.



Keskuskulman suuruus radiaaneina on kaaren pituuden suhde säteeseen.

$$\alpha = \frac{2\pi r}{3} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \quad (\text{rad})}}$$ 1p(6p)

7. Tavallista noppaa heitetään kolme kertaa, jolloin saadaan heittojärjestyksessä luvut a, b, c. Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:

   a) Jono (a, b, c) on aidosti kasvava ja aritmeettinen.

   b) Jono (a, b, c) on geometrinen.

Ratkaisu.

a) Selvitetään ensin suotuisat tapaukset sille, että jono on aidosti kasvava ja aritmeettinen. Erotusluvun täytyy olla positiivinen, jotta jono olisi aidosti kasvava. Lisäksi sen täytyy olla kokonaisluku, sillä nopan mahdolliset silmäluvut ovat aina kokonaisluvun päässä toisistaan. Erotusluvun täytyy siis olla positiivinen kokonaisluku. Käydään eri vaihtoehdot läpi:

1) Erotusluku on 1.
Tällöin suotuisia tapauksia ovat

$$\begin{gathered}(1,2,3)\\(2,3,4)\\(3,4,5)\\(4,5,6)\end{gathered}$$

2) Erotusluku on 2.
Tällöin suotuisia tapauksia ovat

$$\begin{gathered}(1,3,5)\\(2,4,6)\end{gathered}$$

Erotusluku ei voi olla 3 tai suurempi, koska tällöin kolmas luku

$$c \geq a + 2 \cdot 3 \geq 7$$

Suotuisia tapauksia on siis yhteensä 6. 1p
Yhteensä kolmen jonoja on 6^3. 1p(2p)

Todennäköisyys on suotuisten jonojen lukumäärä jaettuna kaikkien jonojen lukumäärällä eli

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}} = 0{,}02777\ldots = 2{,}777\ldots\ \% \approx \underline{\underline{2{,}8\,\%}}$$ 1p(3p)

b) Selvitetään ensin suotuisat tapaukset sille, että jono geometrinen. Jos geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on a ja toinen b, niin suhdeluku on $\frac{b}{a}$. Tällöin kolmas jäsen on

$$\frac{b}{a}b = \frac{b^2}{a}$$

Tutkitaan ensin sellaisia geometrisia jonoja, joiden suhdeluku $q > 1$ eli jono on aidosti kasvava. Selvitetään suotuisat tapaukset sen mukaan, mikä on jonon ensimmäinen jäsen.

1) Ensimmäinen jäsen on 1.
Tällöin suotuisia tapauksia ovat

$$(1, 2, 4)$$
$$\cancel{(1, 3, 9)}$$

Muita ei voi olla, koska tällöin kolmas luku olisi aina suurempi kuin 6.

2) Ensimmäinen jäsen on 2.
Tällöin suotuisia tapauksia ovat

$$\cancel{(2, 3, \frac{9}{2})}$$
$$\cancel{(2, 4, 8)}$$

Muita ei voi olla, koska tällöin kolmas luku olisi aina suurempi kuin 6.

3) Ensimmäinen jäsen on 3.
Tällöin suotuisia tapauksia ovat

$$\cancel{(3, 4, \frac{16}{3})}$$
$$\cancel{(3, 5, \frac{25}{3})}$$

Muita ei voi olla, koska tällöin kolmas luku olisi suurempi kuin $\frac{25}{3} > 6$.

4) Ensimmäinen jäsen on 4.
Tällöin suotuisia tapauksia ovat

$$\cancel{(4, 5, \frac{25}{4})}$$

Muita ei voi olla, koska tällöin kolmas luku olisi suurempi kuin $\frac{25}{4} > 6$.

5) Ensimmäinen jäsen on 5 tai suurempi.
   Koska tutkittiin jonoja, jotka ovat aidosti kasvavia, ensimmäinen jäsen voi olla korkeintaan 4, sillä muuten kolmas jäsen olisi suurempi kuin 6.

Ainoa aidosti kasvava geometrinen jono on siis $(1, 2, 4)$.

Jos $q < 1$ ja tällöin jono (a, aq, aq^2) on geometrinen, niin jono (aq^2, aq, a) on geometrinen, jonka suhdeluku on $q^{-1} > 1$. Jokaista aidosti vähenevää geometrista jonoa kohden on aidosti kasvava geometrinen lukujono. Tämän vuoksi jono $(4, 2, 1)$ on ainoa aidosti vähenevä geometrinen jono.

Aidosti kasvavia geometrisia jonoja on yksi ja aidosti väheneviä geometrisia jonoja on yksi. Lisäksi vakiojonot ovat geometrisia. Vakiojonoja on kuusi kappaletta: 1p(4p)

$$
\begin{gathered}
(1, 1, 1)\\
(2, 2, 2)\\
(3, 3, 3)\\
(4, 4, 4)\\
(5, 5, 5)\\
(6, 6, 6)
\end{gathered}
$$

Yhteensä geometrisia jonoja on siis kahdeksan. 1p(5p)

Yhteensä kolmen jonoja oli 6^3.
Todennäköisyys on suotuisten jonojen lukumäärän suhde kaikkien jonojen lukumäärään eli

$$\frac{8}{6^3} = \frac{2^3}{(2 \cdot 3)^3} = \frac{1}{3^3} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}} = 0{,}0370370\ldots = 3{,}70370\ldots\,\% \approx \underline{\underline{3{,}7\,\%}}$$ 1p(6p)

8. Eksponenttifunktion e^x likiarvoja voidaan laskea n-asteisten polynomien

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

avulla, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Kuinka suuri suhteellinen virhe syntyy, kun Neperin luvun e likiarvona käytetään lukua $P_5(1)$?

b) Eksponenttifunktion derivaatalle pätee $De^x = e^x$, kun $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että tehtävän polynomeille on voimassa

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x)$$

kaikilla $n = 2, 3, 4, \ldots$

c) Määritä pienin mahdollinen asteluku n, jolle

$$|P_n(x) - P_n'(x)| < 10^{-6}$$

kaikilla $0 \leq x \leq 1$. Tarvittavan epäyhtälön voi ratkaista esimerkiksi kokeilemalla.

Ratkaisu.

$$e^x \approx P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots$$

a)

$$\begin{aligned} \frac{P_5(1)}{e} &= \frac{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!}}{e} \\ &= \frac{\frac{163}{60}}{e} \\ &= 0{,}9994058\ldots \end{aligned}$$

1p

1p oikeasta $P_5(1)$ arvosta

Suhteellinen virhe on

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}9994058\ldots &= 0{,}00059418\ldots \\ &= 0{,}059418\ldots\,\% \\ &\approx 0{,}05942\,\% \end{aligned}$$

Vastaus: Suhteellinen virhe on 0,05942 % todellista arvoa pienempi. 1p(2p) b)

$\boxed{\text{Vaihtoehto 1}}$

$$P_n'(x) = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!}$$ 1p(3p)

$$P_n'(x) = 1 + \frac{\cancel{2}^{1}\,x}{1\cdot\cancel{2}_{1}} + \frac{\cancel{3}^{1}\,x^2}{1\cdot 2\cdot\cancel{3}_{1}} + \frac{\cancel{4}^{1}\,x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cancel{4}_{1}} +$$

$$\cdots + \frac{\cancel{n}^{1}\,x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot\cancel{n}_{1}}$$

$$P_n'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x)$$ 1p(4p)

□

$\boxed{\text{Vaihtoehto 2}}$

Tarkastellaan polynomin $P_n(x)$ yksittäisen termin derivaattaa. Kun $k > 0$, niin

$$D\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{kx^{k-1}}{k\cdot(k-1)!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$ 1p(3p)

Koska summan voi derivoida termeittäin, niin

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= P_{n-1}(x) \end{aligned}$$ 1p(4p)

□

c) Tiedetään, että

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x). \quad \text{(b-kohta)}$$

Joten

$$P_n(x) - P_n'(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$$

$$P_n(x) - P_n'(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$ 1p(5p)

Epäyhtälö

$$\begin{aligned} |P_n(x) - P_n'(x)| &< 10^{-6} \quad \| \text{Sij. } (1) \\ \left|\frac{x^n}{n!}\right| &< 10^{-6}, \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ja } 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^n}{n!} &< 10^{-6}, \quad \text{kun } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ja } 0 \le x \le 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Epäyhtälön (2) vasen puoli on annetulla välillä $0 \le x \le 1$ suurin kaikilla n, kun $x = 1$, joten (2) toteutuu kaikilla $0 \le x \le 1$, kun

$$\begin{aligned} \frac{1^n}{n!} &< 10^{-6} \quad \| \cdot n! \\ 1 &< n! \cdot 10^{-6} \quad \| : 10^{-6} \\ n! &> 10^6. \end{aligned}$$

Koska $9! = 362\,880$ ja $10! = 3\,628\,800$, niin tämä epäyhtälö toteutuu kokonaisluvuilla $n > 9$.

Vastaus: Pienin mahdollinen asteluku on $n = 10$. 1p(6p)

9. a) Olkoot $a > 0$ ja

$$f(t) = ae^{-at},$$

kun $t \geq 0$. Osoita, että funktio $f(t)$ toteuttaa ehdon

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = 1,$$

jokaisella parametrin a arvolla. Tästä seuraa, että $f(t)$ on erään jatkuvan todennäköisyysjakauman tiheysfunktio. Jakaumaa kutsutaan *eksponenttijakaumaksi*. Huom.: Pelkkä laskin ei riitä perusteluksi.

b) Eksponenttijakaumalla voidaan kuvata mm. peräkkäisten neutriinohavaintojen välistä aikaa. Eräällä havaintolaitteella peräkkäisten havaintojen väliajan mediaani oli 46,90 minuuttia, eli puolessa tilastoiduista tapauksista väliaika oli tätä pienempi ja puolessa suurempi. Millä parametrin a arvolla tiheysfunktio $f(t)$ kuvaa näitä mittaustuloksia?

Ratkaisu.

$$f(t) = ae^{-at}, \qquad \text{kun } a > 0$$

a) Lasketaan epäoleellinen integraali.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} f(t)\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} ae^{-at}\,dt \\
&= \lim_{M\to\infty} -\int_0^{M} -ae^{-at}\,dt \\
&= \lim_{M\to\infty} -\Big/_{0}^{M} e^{-at} \qquad \text{1p} \\
&= \lim_{M\to\infty} -e^{-aM} + e^{-a\cdot 0} \qquad \text{1p(2p)} \\
&= 1 - \lim_{M\to\infty} e^{-aM} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Siis

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{1p(3p)}$$

□

b) Olkoon t aika minuutteina. Koska 46,90 minuuttia on väliajan mediaani, se tarkoittaa, että

$$\int_0^{46{,}90} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$ 1p(4p)

Ratkaistaan a:

$$\frac{1}{2} = \int_0^{46{,}90} ae^{-at}\,dt$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-46{,}90a} \qquad \text{(laskimesta tai kuten a-kohdassa)}$$ 1p(5p)

$$e^{-46{,}90a} = \frac{1}{2}$$

$$-46{,}90a = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a = \frac{\ln(2^{-1})}{-46{,}90}$$

$$a = \frac{-\ln 2}{-46{,}90}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{\ln 2}{46{,}90} \approx 0{,}01478\left(\frac{1}{\text{min}}\right)}}$$ 1p(6p)

10. Juha yrittää todistaa seuraavan väitteen: *Jos positiivinen kokonaisluku on jaollinen luvulla* 3*, niin se on jaollinen luvulla* 6*.* Hän ehdottaa seuraavaa todistusta:

> Oletetaan, että a on jaollinen luvulla 6. Tällöin on olemassa kokonaisluku b, jolle pätee $a = 6b$. Nyt $a = 3 \cdot 2b$. Siksi a on jaollinen luvulla 3.

Osoita, että Juhan väite ei pidä paikkaansa. Mikä päättelyssä on väärin? Minkä väitteen Juhan päättely todistaa?

Ratkaisu. Osoitetaan vastaesimerkillä, ettei Juhan väite pidä paikkaansa:

Luku 3 on positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen luvulla 3, mutta ei luvulla 6. 2p

Vastaesimerkiksi käy mikä tahansa kolmella, mutta ei kahdella jaollinen luku. Tällaisia lukuja ovat luvut, jotka ovat muotoa $3+6n$, jossa $n \in \mathbb{N}$, kuten esimerkiksi 9, 15 ja 21. Yksi vastaesimerkki riittää.

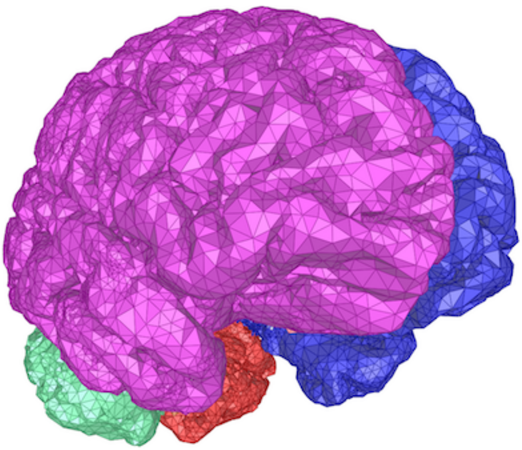
Väite: ”Jos A niin B” voidaan todistaa olettamalla A ja päättelemällä B. Juha on olettanut sen, mitä pitää päätellä eli väitteen B, joka on ”Luku a on jaollinen kuudella.” Hänen olisi pitänyt olettaa, että positiivinen kokonaisluku a on jaollinen kolmella ja yrittää päätellä siitä, että a on jaollinen kuudella. 2p(4p)

Juha on todistanut väitteen ”Jos kokonaisluku on jaollinen luvulla kuusi, niin se on jaollinen luvulla 3.” 2p(6p)

11. Kolmiulotteisissa mallinnusohjelmissa kappaleet esitetään usein kolmioinnin avulla. Tällöin kappaleen pintaa kuvataan suurella määrällä pieniä kolmioita. Jotta voidaan selvittää, mikä kappaleen kohta näkyy tietystä pisteestä tiettyyn suuntaan, täytyy selvittää, mikä kolmio ensimmäisenä tulee vastaan, kun liikutaan katselupisteestä annettuun suuntaan. Vastaa seuraavaan kysymykseen, joka liittyy tähän ongelmaan:
Osuuko origosta vektorin $\bar{s} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ suuntaan lähtevä puolisuora kolmioon, jonka kärkien paikkavektorit ovat

$$\begin{aligned}\bar{a} &= 3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}\\ \bar{b} &= 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}\\ \bar{c} &= 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}?\end{aligned}$$

Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä olevan kolmion pisteet ovat muotoa $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, kun α, β, $\gamma \geq 0$ ja $\alpha + \beta + \gamma = 1$.



Lähde: `http://i.cs.hku.hk/~wchu/cgal_manual/doc_html/cgal_manual/Surface_mesher/segmented_head.png` (luettu 25.9.2017)

Ratkaisu. Puolisuora osuu kolmioon, jos löytyy luvut t, α, β ja γ, joille pätee

$$t\bar{s} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c},$$ 1p

missä

$$t, \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

ja pätee

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \text{eli} \quad \gamma = 1 - \alpha - \beta.$$

Sijoitetaan vektorit $\bar{s}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$:

$$\begin{aligned} t(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}) &= \alpha(3\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k})+\beta(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}) \\ &\quad+(1-\alpha-\beta)(4\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}) \\ t\bar{i}+t\bar{j}+t\bar{k} &= (3\alpha+2\beta+4-4\alpha-4\beta)\bar{i}+(2\alpha+3\beta+3-3\alpha-3\beta)\bar{j} \\ &\quad+(4\alpha+4\beta+2-2\alpha-2\beta)\bar{k} \\ t\bar{i}+t\bar{j}+t\bar{k} &= (-\alpha-2\beta+4)\bar{i}+(-\alpha+3)\bar{j}+(2\alpha+2\beta+2)\bar{k} \end{aligned}$$

1p(2p)

Koska komponentteihin jako on yksikäsitteinen, tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} t=-\alpha-2\beta+4 \\ t=-\alpha+3 \\ t=2\alpha+2\beta+2 \end{cases}$$

2p(4p)

Sijoitetaan $t=-\alpha+3$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$\begin{cases} -\alpha+3=-\alpha-2\beta+4 \\ -\alpha+3=2\alpha+2\beta+2 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan $\beta=\frac{1}{2}$. Sijoittamalla tämä alempaan yhtälöön saadaan yhtälö

$$-\alpha+3=2\alpha+3,$$

jonka ainoa ratkaisu on $\alpha=0$.
Siten

$$\gamma=1-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad t=-0+3=3.$$

1p(5p)

Koska t, α, β, $\gamma \geq 0$, niin puolisuora osuu kolmioon.

1p(6p)

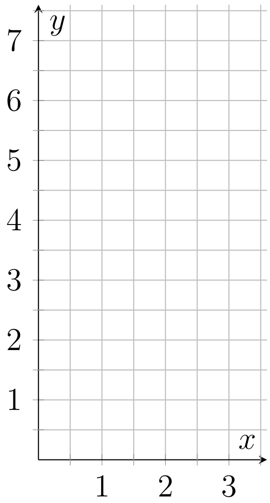
Vastaus: Puolisuora osuu kolmioon.

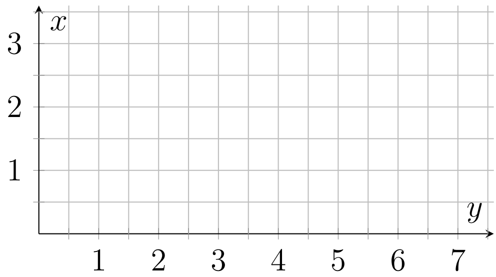
12. Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{1}{6}x^3$ ja sen kuvaajaa $y = f(x)$.

a) Kopioi alla olevat koordinaatistot vastauspaperiisi ja piirrä niihin funktion $f(x)$ kuvaaja. Huomaa akselien merkinnät.

b) Laske $f'(2)$ ja $(f^{-1})'(f(2))$.

c) Perustele graafisesti kaava $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$, kun $x \neq 0$.

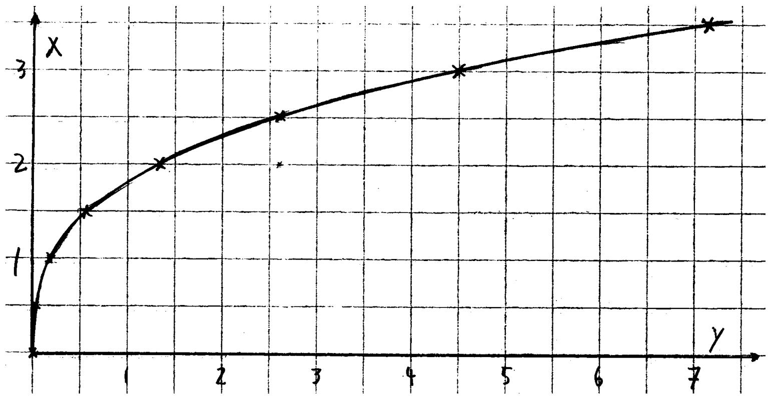




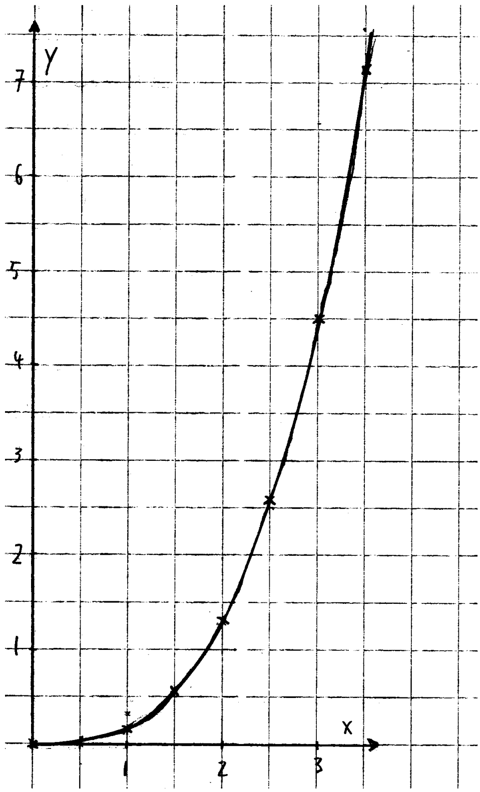
Ratkaisu.

a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	0	0,020 ...	0,166 ...	0,5625	1,333 ...	2,604 ...	4,5	7,145 ...



1p



1p(2p)

b) Derivoidaan funktio f. Saadaan

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3$$
$$f'(x) = \frac{1}{6}\cdot 3x^2 = \frac{1}{2}x^2.$$

Tästä saadaan

$$f'(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2.$$ 1p(3p)

Käytetään sitten käänteisfunktion derivointikaavaa. Saadaan

$$\left(f^{-1}\right)'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$$ 1p(4p)

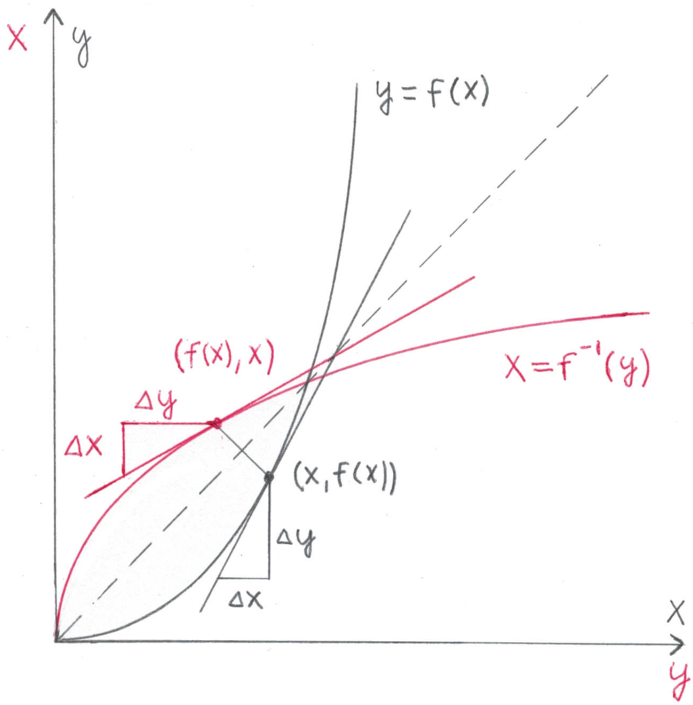
Vastaus: $\underline{\underline{f'(2) = 2 \text{ ja } (f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{2}}}$

c) Funktion kuvaajan $y = f(x)$ yhtälön voi myös esittää muodossa $x = f^{-1}(y)$. Käänteisfunktion kuvaaja saadaan siis funktion kuvaajasta vaihtamalla koordinaattiakselit toisiinsa eli peilaamalla suoran $y = x$ suhteen. Peilauksessa funktion kuvaajalle pisteeseen $(x, f(x))$ piirretty tangentti kuvautuu käänteisfunktion pisteeseen $(f(x), x)$ piirretyksi tangentiksi. 1p(5p)

Koska $x \neq 0$, niin $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \neq 0$. Tangenttisuoran kulmakerroin on $f'(x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Peilatulla suoralla x- ja y-koordinaatit ovat toisin päin, joten peilatun suoran kulmakerroin on

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x)}$$ 1p(6p)

Alla olevaa kuvaa ei tarvita vastaukseen, mutta se voi helpottaa ratkaisun seuraamista.

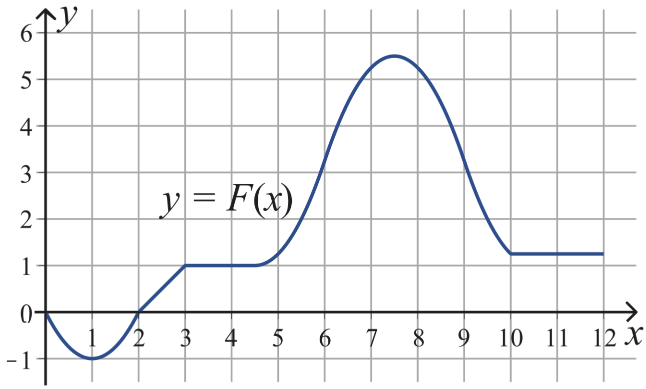


13. Olkoon $f(x)$ funktio, joka on määritelty välillä $0 \leq x \leq 12$. Alla on esitetty funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12$. Arvioi kuvaajan perusteella

a) määrättyä integraalia $\int_1^4 f(t)\,dt$
b) millä väleillä funktio $f(x)$ on vakio
c) millä väleillä funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä.



Ratkaisu. Jotta tehtävän b- ja c-kohdat olisivat mielekkäitä, oletetaan että f on jatkuva väleillä $]0, 2[$, $]2, 3[$, $]3, 10[$ ja $]10, 12[$, jolloin näillä väleillä $F'(x) = f(x)$.
Lisäselitys: Oletus täytyy tehdä tästä syystä: Funktion f integraalifunktio ei muutu, vaikka funktion f arvoa yksittäisessä pisteessä muutettaisiin. Esimerkiksi välit, joilla funktio on vakio, muuttuisivat, jos funktion arvoa muutetaan jossain sellaisen välin pisteessä. Kun f on jatkuva, tiedetään että se ei voi edes yksittäisissä pisteissä saada erisuuria arvoja niillä väleillä, joilla f näyttäisi olevan vakio integraalifunktion $F(x)$ kuvaajan perusteella.

a) Huomataan, että

$$\int_1^4 f(t)\,dt = \int_0^4 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt = F(4) - F(1).$$

Kuvaajan perusteella

$$F(1) = -1 \quad \text{ja} \quad F(4) = 1.$$

Siten

$$\int_1^4 f(t)\,dt = F(4) - F(1) \\ = 1 - (-1) \\ = 2.$$

1p

Vastaus: Kuvaajan perusteella $\int_1^4 f(t)\,dt = 2.$

1p(2p)

b) $f(x) = F'(x)$ niillä väleillä, joilla f on jatkuva. Funktion derivaatta on vakio täsmälleen niillä väleillä, joilla funktion kuvaaja on suora. Näillä väleillä jokaiseen pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on suoran kulmakerroin eli sama. Siten $f(x)$ on vakio niillä väleillä, joilla $F(x)$ on suora. Kuvaajan perusteella tällaisia ovat välit $]2, 3[$, $]3; 4{,}5]$ ja $]10, 12[$ ja kaikki näiden osavälit.

1p(3p)

1p(4p)

c) Katsotaan kuvaajasta välit, joilla $f = F'$ on aidosti vähenevä. Tarkastellaan siis, missä funktion F tangenttien kulmakertoimet laskevat, eli etsitään välejä, joilla funktion F kuvaaja kaartuu alaspäin eli on kupera ylöspäin. Kuvaajan perusteella se on aidosti vähenevä vain välillä $[6, 9]$ ja kaikilla tämän välin osaväleillä.

1p(5p)

1p(6p)