YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

1.10.2018

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Jos teet tehtävän 5, kirjoita sen ratkaisu kokoarkille. Muussa tapauksessa kirjoita kokoarkille vain nimitietosi. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Puoliarkit kootaan kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Olkoot $\overline{u} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = -\overline{i} - 7\overline{k}$ vektoreita. Laske summa $\overline{u} + 2\overline{v}$, pistetulo $\overline{u} \cdot \overline{v}$ sekä vektoreiden $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välisen kulman likiarvo asteen tarkkuudella.

6. Suora $y = kx$ sivuaa ympyrää $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$.

a) Määritä kulmakertoimen k kaikki mahdolliset arvot.

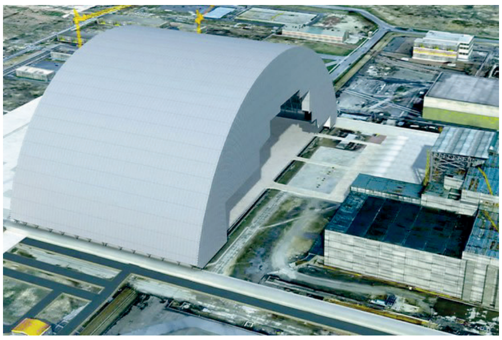
b) Määritä suurempaa kulmakerrointa vastaavan sivuamispisteen koordinaatit.

7. Tšernobylin vuoden 1986 ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen radioaktiivista cesium-137-isotooppia levisi suureen osaan Eurooppaa ja myös Suomeen. Koska tämän isotoopin puoliintumisaika on 30 vuotta, niin tietylle alueelle laskeutuneen isotoopin määrä oli puoliintunut vuoteen 2016 mennessä. Oletetaan, että tietylle alueelle laskeutuneen isotoopin määrä oli y_0 vuonna 1986.

a) Määritä alueen cesium-137-isotoopin määrää kuvaavassa funktiossa $y(t) = y_0 e^{-kt}$ esiintyvä vakio k, kun muuttujana t on aika vuosina alkaen vuodesta 1986.

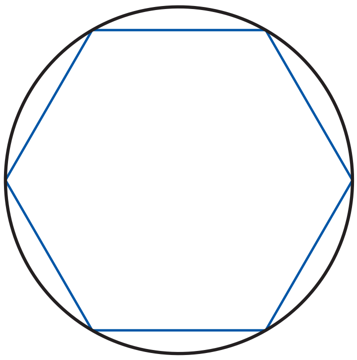
b) Minä vuonna kyseistä isotooppia on alueella jäljellä enää 10 % vuoden 1986 määrästä?

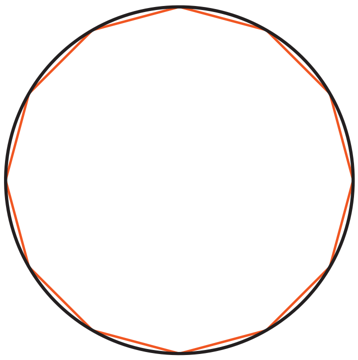
c) Kuinka suurella nopeudella kyseisen isotoopin määrä vähenee alueella 40 vuotta onnettomuuden jälkeen? Anna vastaus yksikkönä y_0/vuosi.



Lähde: <http://cdni.wired.co.uk>. Luettu 17.12.2016.

8. Yksikköympyrän kehän pituus on 2π. Arvioi tätä lukua approksimoimalla ympyrää sen sisään piirretyllä säännöllisellä kuusikulmiolla ja laskemalla kuusikulmion piirin pituus. Muodosta toinen arvio säännöllisen 12-kulmion avulla ja määritä kummankin approksimaation suhteellinen virhe vertaamalla tuloksia laskimen antamaan luvun 2π likiarvoon.





9. Weibullin (λ, k)-jakauman avulla voidaan kuvata mm. maantiepölyn hiukkasten kokoa. Tutkitaan tapausta $\lambda = 1$, jolloin jakauman tiheysfunktio määritellään kaavalla

$$w(t,k) = kt^{k-1}e^{-t^k},$$

kun $t \geq 0$ ja $k > 0$. Weibullin kertymäfunktio määritellään kaavalla

$$W(x,k) = \int_0^x w(t,k)\,dt.$$

a) Määritä $\lim\limits_{t \to 0+} w(t,k)$ vakion k eri arvoilla.

b) Määritä kertymäfunktion $W(x,k)$ lauseke, kun $x \geq 0$.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Tässä tehtävässä on käytössä kaksi mittakeppiä sekä kynä, jolla voi tehdä merkintöjä. Tarkoituksena on mitata keppien avulla pituuksia. Silmämääräisiä arvioita ei sallita.

a) Voidaanko 5 metrin ja 3 metrin keppien avulla mitata 4 metrin pituus? (1 p.)

b) Voidaanko 10 metrin ja 6 metrin keppien avulla mitata 7 metrin pituus? (1 p.)

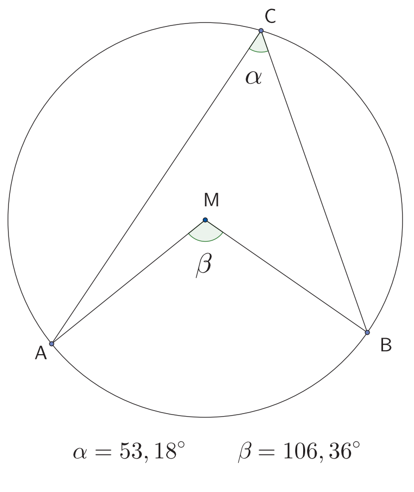
c) Määritä ne positiiviset kokonaisluvut k, joilla on seuraava ominaisuus: $2k$ metrin ja $k + 1$ metrin pituisten keppien avulla voidaan mitata $k + 2$ metrin pituus. (4 p.)

11. Alla olevien kuvioiden kaksi tilannetta ovat syntyneet erään abiturientin harjoitellessa dynaamisen matematiikkaohjelman käyttöä. Tehtävänä on auttaa häntä viemään tarkastelu loppuun molemmissa tapauksissa.

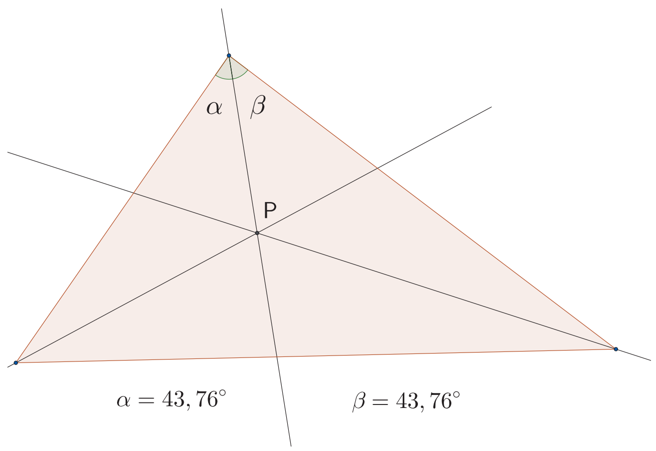
a) Mitä ympyrään liittyvää lausetta abiturientti tutkii kuvassa 1? Kirjoita lause mahdollisimman täsmällisiä termejä käyttämällä. (1 p.)

b) Abiturientti tarkastelee kuvassa 2 näkyvän kolmion merkillistä pistettä P. Mikä tämä piste on? Minkä pisteeseen P liittyvän geometrisen ominaisuuden abiturientti voi todentaa, jos hän piirtää ympyrän, jonka keskipisteenä on P ja jonka säde on sopivan mittainen? (1 p.)

c) Perustele **joko** a-kohdan lause, kun pisteet A, M ja C ovat samalla suoralla, **tai** b-kohdan ominaisuus. (4 p.)



Kuva 1.

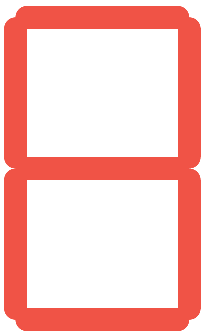


Kuva 2.

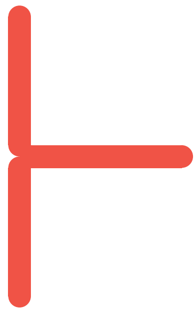
12. Digitaalikellossa numerot nollasta yhdeksään esitetään numeron 8 muotoon asetettujen seitsemän LED-valon avulla (ks. kuva 1).

a) Kuinka monta eri merkkiä ledeillä voidaan esittää, jos merkiltä vaaditaan, että se on yhtenäinen (kuten kuvissa 1 ja 2) ja että ainakin yksi LED-valo palaa? (4 p.)

b) Kuinka suurella todennäköisyydellä merkki on yhtenäinen, jos kukin LED-valo on päällä toisista valoista riippumatta todennäköisyydellä 0,5? (Tyhjä merkki, jossa mikään valo ei pala, tulkitaan yhtenäiseksi.) (2 p.)



Kuva 1:
Kaikki 7 LED-valoa



Kuva 2:
Yhtenäinen merkki

Kuva 3:
Epäyhtenäinen merkki

13. a) Määritä sellainen vakion a tarkka arvo, että yhtälöllä $x^2 = a + \ln x$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. (2 p.)

b) Edellinen kohta voidaan yleistää korvaamalla x^2 kasvavalla funktiolla $f(x)$, jolle pätee $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen vakion a arvo, jolla yhtälöllä $f(x) = a + \ln x$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. (4 p.)