# MAA11-Harjoituskoe

# RATKAISUT

**1.** Osoita, että lauseet $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$ sekä $\neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \wedge \neg(\mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{P})$ ovat loogisesti yhtäpitäviä.

| P | Q | $\neg$ P | $\neg$ Q | "A" $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$ | $\neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$ | $\neg(\mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{P})$ | "B" $\neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \wedge \neg(\mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{P})$ | A $\leftrightarrow$ B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** |

**Lauseiden välinen ekvivalenssi on tautologia, joten lauseet ovat loogisesti yhtäpitävät.**

**2.** Olkoon perusjoukkona tietty ihmisten joukko ja R($x$, $y$): "$x$ rakastaa $y$:tä" avoin lause. Formalisoi seuraavat lauseet

**a)** Jokainen ihminen rakastaa jotain ihmistä

**b)** Jotain ihmistä rakastavat kaikki ihmiset

**c)** Jotkut ihmiset rakastavat toisiaan.

**a)** $\forall x \exists y : \mathrm{R}(x, y)$ **b)** $\exists y\, \forall x : \mathrm{R}(x, y)$ **c)** $\exists x\, \exists y : (R(x, y) \wedge R(y, x))$.

**3.** Kirjoita todistus lauseelle ”Jos kokonaisluku $n$ on pariton, niin myös $n^2$ on pariton”.

**Oletus:** $n$ on pariton kokonaisluku

**Väite:** $n^2$ on pariton luku

**Todistus:**

Koska oletuksen mukaan $n$ on pariton kokonaisluku, niin on olemassa kokonaisluku $k$, että $n = 2k + 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 \qquad \text{(muistikaava!)} \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

joka on pariton kokonaisluku sillä $2k^2 + 2k$ on kokonaisluku!

**4.** Todista lause vääräksi tai oikeaksi.

**a)** Kahden erisuuren alkuluvun tulo on aina pariton.

**b)** Jos kahden positiivisen kokonaisluvun tulo on pariton, niin molemmat luvuista ovat myös parittomia.

**a)** Lause on epätosi, sillä esimerkiksi 2 ja 3 ovat alkulukuja, mutta $2 \cdot 3 = 6$ ja parillinen.

**b)** Lause on tosi

**Oletus:** Luvut $a$ ja $b$ positiivisia kokonaislukuja ja tulo $ab$ on pariton.

**Väite:** Molemmat luvut $a$ ja $b$ ovat parittomia lukuja.

**Todistus:**

Tehdään **vastaoletus:** Ainakin toinen luvuista on parillinen. Olkoon se luku $a$.

Tällöin on olemassa kokonaisluku $n$, että $a = 2n$.

Tällöin lukujen tulo $a \cdot b = 2n \cdot b$, joka on parillinen kokonaisluku. Tämä on ristiriita alkuperäiseen oletukseen nähden!

$\Rightarrow$ Vastaoletus on väärä ja siten alkuperäinen väite on totta!

**5.** Muodosta lukujen 7056 ja 337500 alkutekijähajoitelmat ja määritä niistä lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta.

$$\begin{aligned}
7056 &= 2 \cdot 3528 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 1764 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 882 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 441 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 63 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \\
&= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
337500 &= 27 \cdot 12500 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 100 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 4 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5
\end{aligned}$$

$$\text{syt}(7056, 337500) = 2^2 \cdot 3^2 = \underline{\underline{36}}$$

$$\text{pym}(7056, 337500) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^2 = \underline{\underline{66150000}}.$$

**6.** Käyttäen 9 ja 5 litran sankoja, pitäisi saaviin mitata järvestä 12 litraa vettä. Laske Diofantoksen yhtälön avulla, miten se voitaisiin tehdä helpoimmalla tavalla.

Olkoon $x$ ja $y$ 9 ja 5 litran sankomäärät. Tällöin saadaan Diofantoksen yhtälö

$$9x+5y=12.$$

Etsitään syt(9,5):

$$9=5\cdot 1+4$$
$$5=4\cdot 1+\boxed{1} \quad \Rightarrow \quad \text{syt}(9,5)=1$$
$$4=4\cdot 1$$

Jakojäännökset yksinään:

$$9-5=4$$
$$5-4=1$$

$$5-4=1$$
$$5-(9-5)=1$$
$$9\cdot(-1)+5\cdot 2=1 \quad \|\cdot 12$$
$$9\cdot(-12)+5\cdot 24=12$$

Yhtälön eräs ratkaisu on $x_0=-12$ ja $y_0=24$.

Kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x=-12+n\cdot\dfrac{5}{1}=-12+5n \\ y=24-n\cdot\dfrac{9}{1}=24-9n \end{cases}$

Taulukoidaan ratkaisuja eri $n$:n arvoilla:

| $n$ | $x$ (9 l) | $y$ (5 l) | Mitä ratkaisu tarkoittaa? |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $-12+5\cdot(-1)=-17$ | $24-9\cdot(-1)=33$ | Lisätään 5 l sangolla 33 kertaa ja otetaan pois 9 l sangolla 17 kertaa |
| 0 | -12 | 24 | Lisätään 5 l sangolla 24 kertaa ja otetaan pois 9 l sangolla 12 kertaa |
| 1 | -7 | 15 | Lisätään 5 l sangolla 15 kertaa ja otetaan pois 9 l sangolla 7 kertaa |
| 2 | -2 | 6 | Lisätään 5 l sangolla 6 kertaa ja otetaan pois 9 l sangolla 2 kertaa |
| 3 | 3 | -3 | Lisätään 9 l sangolla 3 kertaa ja otetaan pois 5 l sangolla 3 kertaa |
| 4 | 8 | -12 | Lisätään 9 l sangolla 8 kertaa ja otetaan pois 5 l sangolla 12 kertaa |

Nyt $n$:n kasvaessa tai vastaavasti $n$:n pienentyessä negatiivisilla arvoilla sankomäärät kasvavat.
Näin ollen helpoimmalla pääsee tilanteessa $n$ = 3.

**Vastaus.** Mitataan saaviin 3 kertaa 9 litran sangolla 27 litraa ja otetaan saavista pois 3 kolme kertaa 5 litran sangolla 15 litraa. Näin saaviin jää 12 litraa.

**7.** Todista induktiolla seuraava ”3:n kokonaislukupotenssien summakaava”:

$$3^1+3^2+3^3+\ldots+3^n=\frac{3(3^n-1)}{2} \qquad n\in\mathbb{Z},\ n\geq 1$$

**Todistus.**

**1) Alkuaskel:** Osoitetaan, että kaava pätee, kun $n=1$.

$$3^1=\frac{3(3^1-1)}{2}$$
$$3=\frac{3\cdot 2}{2}$$
$$3=3 \qquad \text{tosi!}$$

**2) Induktioaskel:**

**Induktio-oletus:** Oletetaan, että $3^1+3^2+3^3+\ldots+3^n=\dfrac{3(3^n-1)}{2}$ pätee mielivaltaisella $n\in\mathbb{Z},\ n\geq 1$.

**Induktioväite:** Kaava pätee seuraavallakin kokonaisluvulla $n+1$.

**Induktioväitteen todistus:**

$$\underbrace{3^1+3^2+3^3+\ldots+3^n}_{INDUKTIO-OLETUS!}+3^{n+1}=\underbrace{\frac{3(3^n-1)}{2}}_{INDUKTIO-OLETUS!}+{}^{2)}3^{n+1}$$
$$=\frac{3(3^n-1)}{2}+\frac{2\cdot 3^{n+1}}{2}$$
$$=\frac{3\cdot 3^n-3+2\cdot 3^{n+1}}{2}$$
$$=\frac{3^{n+1}-3+2\cdot 3^{n+1}}{2}$$
$$=\frac{3\cdot 3^{n+1}-3}{2}$$
$$=\frac{3(3^{n+1}-1)}{2} \qquad \text{tosi!}$$

1) ja 2) tosi $\Rightarrow$ väite todistettu!

**8.** Mikä on jakojäännös, kun luku $18^2 + 12^{100}$ jaetaan luvulla 11? Ratkaise välivaiheineen käyttämättä laskinta.

Tarkastellaan kongruentteja lukuja modulo 11.

$$18 \equiv 7 \pmod{11}$$
$$12 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\begin{aligned} 18^2 + 12^{100} &\equiv 7^2 + 1^{100} \pmod{11} \\ &\equiv 49 + 1 \pmod{11} \\ &\equiv 50 \pmod{11} \\ &\equiv 6 \pmod{11} \end{aligned}$$

Vastaus. Jakojäännös on 6.