

## MAA11 (Lukuteoria ja todistaminen)

### Välitesti 2 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Todista lause: Kun lisäät minkä tahansa parittoman luvun neliöön luvun 5 saat vastaukseksi aina parillisen luvun. (4 p.)

**Oletus:** Olkoon  $a$  pariton luku, ts.  $a = 2n + 1$ . (1 p.)

**Väite:**  $a^2 + 5$  on parillinen. (1 p.)

**Todistus:**

$$\begin{aligned} a^2 + 5 &= (2n + 1)^2 + 5 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 + 5 \\ &= 4n^2 + 4n + 6 && (1 \text{ p.}) \\ &= 2(2n^2 + 2n + 3), \text{ mikä on parillinen luku!} && (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

2. Osoita lause epätodeksi: Kahden peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina parillinen. (3 p.)

Kumotaan väite vastaesimerkillä:

Olkoon peräkkäiset kokonaisluvut vaikkapa 2 ja 3. (1 p.)

$2 + 3 = 5$ , joka ei ole parillinen luku. (2 p.)

3. Todista lause: Kahden peräkkäisen kokonaisluvun tulo on aina parillinen. (5 p.)

**Oletus:** Olkoon peräkkäiset kokonaisluvut  $a$  ja  $a+1$ .

**Väite:**  $a \cdot (a+1)$  on parillinen.

**Todistus:** Ensimmäinen luvuista eli  $a$  voi olla joko parillinen tai pariton luku. Käydään läpi erikseen nämä tapaukset:

$a$  parillinen:

On olemassa kokonaisluku  $n$ , että

$$a = 2n \quad (1 \text{ p.})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \cdot (a+1) &= 2n(2n+1) \\ &= 2(2n^2 + n) \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

$a$  pariton:

On olemassa kokonaisluku  $k$ , että

$$a = 2k + 1 \quad (1 \text{ p.})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \cdot (a+1) &= (2k+1)(2k+1+1) \\ &= (2k+1)(2k+2) \\ &= 4k^2 + 4k + 2k + 2 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1) \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

Molemmissa tapauksissa tuloksi tulee parillinen luku, joten väite on todistettu! (1 p.)