MAA11 (Lukuteoria ja todistaminen)
Välitesti 3 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata! Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Todista lause: Tiedetään, että kokonaisluvun n neliö n^2 on pariton. Tästä seuraa, että kokonaisluku n on pariton. **(6 p.)**

Oletus: kokonaisluvun n neliö n^2 on pariton

Väite: n on pariton luku

Todistus: Tehdään ***vastaväite***, että n olisikin parillinen luku. (2 p.)

Tällöin on olemassa kokonaisluku k, että $n = 2k$. (1 p.)

Silloin olisi $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, joka on parillinen luku. (1 p.)
Tämä on vastoin alkuperäistä oletusta, että n^2 oli pariton. **RISTIRIITA!** (1 p.)

Siispä vastaväite on väärä eli alkuperäisen väitteen on oltava totta. (1 p.)

2. Todista, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla *n* pätee ns. *kuutiojonon summakaava*:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \textbf{(6 p.)}$$

Väite. $1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ kaikilla $n\in\mathbb{Z}_+$

Todistus.

Alkuaskel:

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad 1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$1=\frac{1\cdot 4}{4}$$

$1=1$ tosi! Siis alkuaskel on tosi! (1 p.)

Induktio-oletus:

Oletetaan, että väite pätee mielivaltaisella positiivisella kokonaisluvulla *n*, eli (1 p.)

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Todistetaan, että väite pätee seuraavallakin kokonaisluvulla $n+1$:

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3}_{induktio-oletus}+(n+1)^3=\underbrace{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}_{induktio-oletus}+(n+1)^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$=\frac{n^2{\color{red}(n+1)^2}+4(n+1){\color{red}(n+1)^2}}{4} \quad \text{(yhteinen tekijä!)} \quad \text{(1 p.)}$$

$$=\frac{{\color{red}(n+1)^2}\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} \quad \text{(1 p.)}$$

$$=\frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4} \quad \left(\text{muistikaava } a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\right)$$

$$=\frac{(n+1)^2\left(n+2\right)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2\left((n+1)+1\right)^2}{4} \quad \text{(1 p.)}$$

Väite pätee siis seuraavallakin kokonaisluvulla $n+1$.
Siten väite pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla *n*. (1 p.)