

MAA12 (Algoritmit matematiikassa)

Välitesti 4 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Ratkaise Newtonin menetelmällä yhtälön $x^5 - 2x = -1$ negatiivinen juuri seitsemän desimaalin tarkkuudella. (6 p.)

$$x^5 - 2x = -1$$

$$x^5 - 2x + 1 = 0 \quad (1 \text{ p})$$

Merkitään $f(x) = x^5 - 2x + 1$. $f'(x) = 5x^4 - 2$. (1 p)

Newtonin algoritmi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1 \text{ p})$$

Alkuarvaus $x_1 = -2$ (esim. kuvaajasta! \Rightarrow)

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -1,653846154... \quad (1 \text{ p})$$

$$x_3 = -1,426055869...$$

$$x_4 = -1,316539391...$$

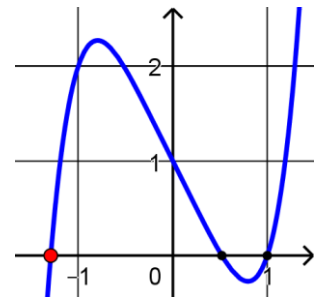
$$x_5 = -1,291800644...$$

$$x_6 = -1,290651198...$$

$$x_7 = -1,290648801...$$

$$x_7 = -1,290648801...$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \approx -1,2906488}} \quad (1 \text{ p})$$



2. Ratkaise yhtälön $x^3 + 2x = 4$ ainoa juuri kahdeksan desimaalin tarkkuudella käyttäen kiintopistemenetelmää. (6 p.)

Muokataan yhtälö kiintopistemuotoon $x = f(x)$:

$$\left(\begin{array}{l} x^3 + 2x = 4 \\ 2x = -x^3 + 4 \quad || : 2 \\ x = \frac{-x^3 + 4}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Tällä muodolla kiintopistemenetelmä ei suppene,} \\ \text{sillä } \left| D \frac{-x^3 + 4}{2} \right| = \left| -\frac{3}{2}x^2 \right| > 1, \text{ kun } x > 1. \end{array}$$

$$x^3 + 2x = 4$$

$$x^3 = 4 - 2x \quad || \sqrt[3]{}$$

$$x = \sqrt[3]{4 - 2x} \quad (2 \text{ p.})$$

Iteroidaan taulukkolaskentasovelluksella funktiota $h(x) = \sqrt[3]{4 - 2x}$ lähtien alkuarvauksesta $x = 1$:

A2		=(4 - 2A1)^(1/3)	
1	1	25	1.1795090209
2	1.2599210499	26	1.1795090264
3	1.1396443695	27	1.1795090238
4	1.1983104141	28	1.179509025
5	1.1704299128	29	1.1795090244
6	1.1838436795	30	1.1795090247
7	1.1774282401	31	1.1795090246
8	1.1805052705	32	1.1795090246
9	1.1790314419	33	1.1795090246
10	1.1797378323	34	1.1795090246

(2 p.)

Nyt nähdään, että yhtälön $x^3 + 2x = 4$ juuri on $x \approx 1,17950902$. (2 p.)