MAA13-Harjoituskoe
RATKAISUT

A-OSA

1. Suppeneeko epäoleellinen integraali $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$? (4 p.)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{s\to 0+}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{s\to 0+}\int_s^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \lim_{s\to 0+} \Big/_{s}^{1} 2x^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{s\to 0+}(2\sqrt{1}-2\sqrt{s}) \\
&= 2-0 \\
&= \underline{\underline{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\text{Integraali suppenee!}}}
\end{aligned}$$

2. Tarkastellaan lukujonoa $a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}$. Tutki ja perustele,

   a) suppeneeko vai hajaantuuko lukujono? (2 p.)

   b) suppeneeko vai hajaantuuko lukujonoa vastaava sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$? (2 p.)

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{2n^2+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(1+\frac{2}{n^2})}{\cancel{n^2}(2+\frac{1}{n})} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$\frac{2}{n^2} \to \mathbf{0}$, $\frac{1}{n} \to \mathbf{0}$

Vast. Lukujono $\underline{\underline{\text{suppenee}}}$ ja sen raja-arvo on $\frac{1}{2}$.

b) Koska sarjan termien raja-arvo ei ole 0 $(\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2} \neq 0)$ niin sarja $\underline{\underline{\text{hajaantuu.}}}$

3. Muuta desimaaliluku $0{,}121212...$ murtolukumuotoon. (4 p.)

$$0{,}121212... = \underbrace{0{,}12 + 0.0012 + 0{,}000012 + ...}_{\text{geometrinen sarja!!}} \qquad \text{Suhdeluku } q = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$= \frac{0{,}12}{1 - 0{,}01}$$

$$= \frac{0{,}12}{0{,}99}$$

$$= \underline{\underline{\frac{12}{99}}}$$

B-OSA

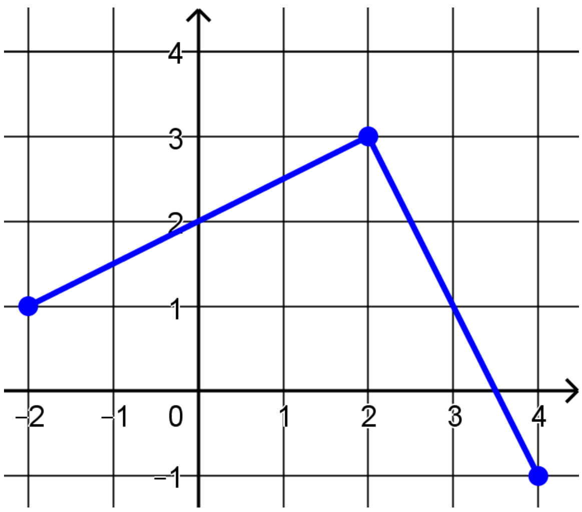
1. Kuvassa on funktion $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ kuvaaja.

   a) Anna funktion lauseke $f(x)$ paloittain määriteltynä funktiona. (1 p.)

   b) Osoita, että funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = 2$. (2 p.)

   c) Osoita, että funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$. (1 p.)

   d) Osoita derivaatan määritelmällä, että funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 2$. (2 p.)



a)

$$f(x) = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2, & \text{kun } \; -2 \le x \le 2 \\ -2x + 7, & \text{kun } \; 2 < x \le 4 \end{cases}}}$$

b)

Lasketaan toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2-} f(x) &= \lim_{x \to 2-} (\tfrac{1}{2}x + 2) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3 \\ \lim_{x \to 2+} f(x) &= \lim_{x \to 2+} (-2x + 7) = -2 \cdot 2 + 7 = 3 \end{aligned}\right\} \text{samat!} \quad \Rightarrow \quad \text{Funktiolla on raja-arvo } \lim_{x \to 2} f(x) = \underline{\underline{3}}$$

c)

Lasketaan funktion arvo kohdassa $x=2$:

$$f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+2=3$$

Jatkuvuuden määritelmän, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3=f(2)$, perusteella funktio on jatkuva kohdassa $x=2$.

d)

Määritetään toispuoliset derivaatat kohdassa $x=2$:

$$f_-'(2)=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{2}x+2-3}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{2}x-1}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{2}\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\frac{1}{2}$$

$$f_+'(2)=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-2x+7-3}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=-2$$

Koska $f_-'(2)\neq f_+'(2)$, ei funktio ole derivoituva kohdassa $x=2$.

2. Olkoon funktio $f(x)=x^3+x-1$.

   a) Osoita, että funktiolla f on olemassa kaikkialla määritelty käänteisfunktio f^{-1}.

   b) Mikä on käänteisfunktion arvo kohdassa $x=0$. Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

   c) Laske derivaatta $(f^{-1})'(9)$.

a)

$f(x)=x^3+x-1$

$f'(x)=3x^2+1>0 \quad\Rightarrow\quad f(x)$ on aidosti kasvava $\quad\Rightarrow\quad$ käänteisfunktio $f^{-1}(x)$ on olemassa!

Koska funktio $f(x)$ saa kaikki reaalilukuarvot, on käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ määrittelyjoukko $\mathbb{R}$.

b)

$$f^{-1}(0)=x \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=0$$

$$x^3+x-1=0$$

$\text{solve}\left(x^3+x-1=0,x\right)$ $\qquad x=0.682327803828$

$$f^{-1}(0)=0{,}6823\ldots\approx\underline{\underline{0{,}68}}$$

c)

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{missä} \;\; y_0 = f(x_0):$$

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{missä} \;\; 9 = f(x_0)$$

$$\text{solve}\left(x^3+x-1=9,x\right) \qquad x=2$$

$$= \frac{1}{f'(2)}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 2^2+1} \qquad (f'(x) = 3x^2+1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{13}}}$$

3. Olkoon erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{kun} \;\; 0 \le x \le 2 \\ ax - \frac{3}{8}, & \text{kun} \;\; 2 < x \le 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

a) Määritä luku a.

b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x)$.

a)

1) On oltava $f(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad ax - \frac{3}{8} \ge 0$

$$ax \ge \frac{3}{8} \quad \|: x \;\; (2 < x \le 4)$$

$$a \ge \frac{3}{8x} \ge \frac{3}{8\cdot 2} = 0{,}1875, \;\; \text{kun} \;\; 2 < x \le 4$$

2) On oltava $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} 0dx \; + \; \int_{0}^{2} \frac{1}{8}dx \; + \; \int_{2}^{4} (ax - \frac{3}{8})dx \; + \; \int_{4}^{\infty} 0dx$

$$\text{solve}\left(\int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{8} \, dx + \int_{2}^{4} \left(a\cdot x - \frac{3}{8}\right) dx + \int_{4}^{\infty} 0 \, dx = 1, a\right) \qquad a = \frac{1}{4}$$

Kohtien 1) ja 2) perusteella $\underline{\underline{a = \frac{1}{4}}}$.

b)

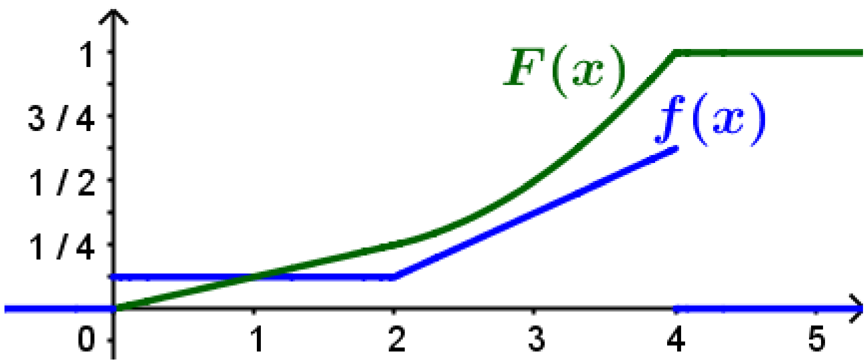
Kun $x < 0$, todennäköisyyttä ei vielä kerry $\Rightarrow$ $F(x) = 0$

Kun $0 \le x \le 2$ $\Rightarrow$ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{8}dt = \Big/_0^x \frac{1}{8}t = \frac{1}{8}x$

Kun $2 < x \le 4$ $\Rightarrow$ $F(x) = \underbrace{\frac{1}{8}\cdot 2}_{\text{Kertymä ennen 2:sta}} + \int_2^x (\frac{1}{4}t - \frac{3}{8})dt = \frac{1}{4} + \Big/_2^x \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{8}t\right) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}$

Kun $x > 4$ $\Rightarrow$ kaikki todennäköisyys on kertynyt $\Rightarrow$ $F(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \underline{\underline{\begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}, & \text{kun } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{kun } x > 4 \end{cases}}}$$



4. Määritä kahden muuttujan funktion $f(x,y)=x^3-y^2-3x+6$ ääriarvot ja niiden laatu.

Osittaisderivaatat:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-y^2-3\cdot x+6\right) \qquad 3\cdot x^2-3$$

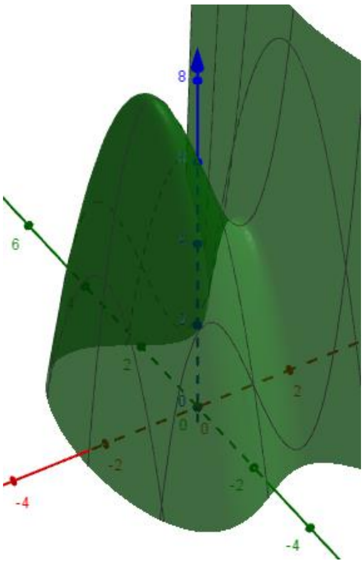
$$\frac{d}{dy}\left(x^3-y^2-3\cdot x+6\right) \qquad -2\cdot y$$

Funktion kriittiset pisteet:

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot x^2-3=0\\ -2\cdot y=0\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=-1 \text{ and } y=0 \text{ or } x=1 \text{ and } y=0$$

Kriittiset pisteet ovat siis $(-1,0)$ ja $(1,0)$. Tarkastetaan kuvaajasta, ovatko pisteet ääriarvokohtia:



Kuvaajasta nähdään, että vain piste $(-1,0)$ on ääriarvokohta ja kyseessä on maksimikohta. (piste $(1,0)$ on satulapiste)

Funktion maksimiarvo on $f(-1,0)=(-1)^3-0^2-3\cdot(-1)+6=\underline{\underline{8}}$.

5. a) Anna sellaisen lukujonon a_n lauseke, jolle pätee seuraavat ehdot:

- a_n on aidosti kasvava,
- lukujonon a_n raja-arvo on 3.

b) Anna sellaisen lukujonon b_n lauseke, jolle pätee seuraavat ehdot:

- b_n on geometrinen,
- lukujonoa b_n vastaavan sarjan $b_1 + b_2 + b_3 + ...$ summa on 3.

a) Esimerkiksi $\underline{\underline{a_n = 3 - \frac{1}{n}}}$

b)
Koska geometrinen sarja suppenee, sille pätee

$$S = \frac{b_1}{1-q} \qquad (S = 3)$$

$$3 = \frac{b_1}{1-q}$$

$$1 - q = \frac{b_1}{3}$$

$$q = 1 - \frac{b_1}{3}$$

Suppenevalle geometriselle sarjalle pitää päteä $|q| < 1$:

$$\text{solve}\left(\left|1 - \frac{b}{3}\right| < 1, b\right) \qquad 0 < b < 6$$

Valitaan luvuksi b_1 väliltä $0 < b_1 < 6$ esimerkiksi $b_1 = 1$:

$$\Rightarrow \quad q = 1 - \frac{b_1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}}$$