

MAA13 (Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi)

Välitesti 2 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä tehtäväpaperiin tai vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisumonisteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Jos sait vähintään 9/12 pistettä, olet valmis siirtymään seuraavaan osioon!

1. Olkoon funktio $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{kun } x < 3 \\ 6, & \text{kun } x = 3. \\ -x^2+6x-4, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$

Osoita jatkuvuuden määritelmän avulla, että funktio $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa $x = 3$. (4 p.)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 3+3=6. \quad (2 \text{ p.})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2+6x-4) = -3^2+6 \cdot 3-4=5. \quad (1 \text{ p.})$$

Koska kohdassa $x = 3$ toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret, ei funktiolla ole raja-arvoa kohdassa $x = 3$. (1 p.)
Siten $f(x)$ ei ole siinä myöskään jatkuva.

2. Olkoon funktio $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{kun } x < 3 \\ 6, & \text{kun } x = 3. \\ -x^2+6x-3, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$

Osoita jatkuvuuden määritelmän avulla, että funktio $g(x)$ on jatkuva kohdassa $x = 3$. (4 p.)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 3+3=6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2+6x-3) = -3^2+6 \cdot 3-3=6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6. \quad (2 \text{ p.})$$

Koska $g(3) = 6$, niin jatkuvuuden määritelmä $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$ pätee (2 p.)
eli funktio $g(x)$ on jatkuva kohdassa $x = 3$.

KÄÄNNÄ →

3. Laske $f'(2)$ derivaatan määritelmällä, kun $f(x) = 3x^2$. (4 p.)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 3 \cdot 2^2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 2^2)}{x - 2} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cancel{(x-2)} (x+2)}{\cancel{x-2}} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 6)$$

$$= \underline{\underline{12}} \quad (1 \text{ p.})$$