

MAA13 (Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi)

Välitesti 4 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä tehtäväpaperiin tai vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisumonisteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Jos sait vähintään 9/12 pistettä, olet valmis siirtymään seuraavaan osioon!

1. Suppeneeko epäoleellinen integraali? Jos suppenee, niin mikä sen arvo on?

a) $\int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{x^5} dx$ (4 p.)

b) $\int_{-1}^0 -\frac{1}{x^5} dx$ (4 p.)

a)

$$\int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{x^5} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-1} -x^{-5} dx \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4} x^{-4} \right]_s^{-1} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4x^4} \right]_s^{-1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4(-1)^4} - \overbrace{\left[\frac{1}{4s^4} \right]}^{\rightarrow 0} \right) \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \frac{1}{4}$$

\Rightarrow Integraali suppenee ja sen arvo on $\frac{1}{4}$ (1 p.)

b)

$$\int_{-1}^0 -\frac{1}{x^5} dx = \lim_{s \rightarrow 0^-} \int_{-1}^s -\frac{1}{4x^4} dx \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^-} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{4s^4} \right]}_{\rightarrow \infty} - \frac{1}{4(-1)^4} \right) \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \infty \quad (1 \text{ p.})$$

\Rightarrow Integraali hajaantuu (1 p.)

2. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{kun } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan tiheysfunktio. (4 p.)

1°) Jokaisella välillä pätee $f(x) \geq 0$. (1 p.)

$$\begin{aligned} 2^\circ) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 0 + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + 0 \\ &= \int_1^4 \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx && (1 \text{ p.}) \\ &= \int_1^4 \sqrt{x} dx \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{1} \\ &= 1 && (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

Kohdista 1°) ja 2°) seuraa, että $f(x)$ on tiheysfunktio. (1 p.)