

# MAA13 (Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi)

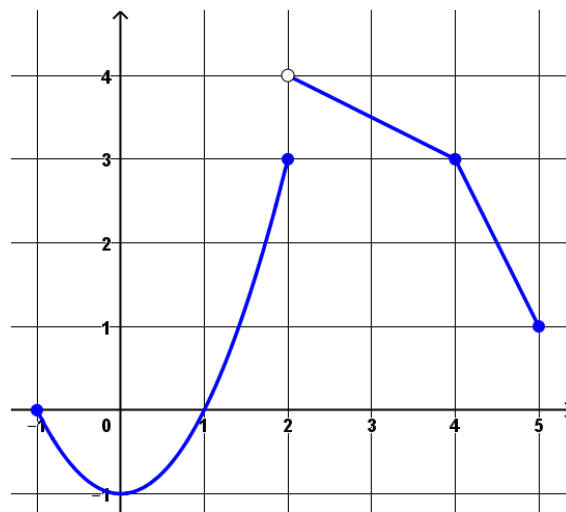
## Välitesti 1 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Kuvassa on funktion  $f : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaaja. Vastaa kysymyksiin kuvaajan perusteella. (5 p.)

- Mikä on funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa  $x = 2$ ?
- Mikä on funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa  $x = 2$ ?
- Onko  $f$  vasemmalta jatkuva kohdassa  $x = 2$ ? Perustele!
- Onko  $f$  oikealta jatkuva kohdassa  $x = 2$ ? Perustele!
- Onko  $f$  jatkuva kohdassa  $x = 2$ ? Perustele!



Arvostelu 1 p. / kohta:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{4}$

c) On, sillä  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 = f(2) = 3$  (vasemmanpuoleinen raja-arvo on sama kuin funktion arvo)

d) Ei, sillä  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \neq f(2) = 3$  (oikeanpuoleinen raja-arvo on eri kuin funktion arvo)

e) Ei, sillä funktio ei ole sekä vasemmalta että oikealta jatkuva kohdassa  $x = 2$ .

Voi myös perustella niin, että funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa  $x = 2$ , joten se ei voi olla siinä jatkuva.

2. Tehtävän 1 funktion  $f : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  lauseke on  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kun } -1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 5, & \text{kun } 2 < x \leq 4 \\ -2x + 11, & \text{kun } 4 < x \leq 5 \end{cases}$ .

a) Laske derivaatan määritelmällä funktion oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa  $x = 4$ . (3 p.)

b) Osoita käyttäen jatkuvuuden määritelmää, että funktio  $f$  on jatkuva kohdassa  $x = 4$ . (4 p.)

a)

$$f'_+(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-2x + 11 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 + 5\right)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-2x + 8}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-2 \cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \underline{\underline{-2}} \quad (1 \text{ p.})$$

b) Jatkuvuuden määritelmä: funktio  $f$  on jatkuva kohdassa  $x = a$ , jos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 5 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-2x + 11) = -2 \cdot 4 + 11 = 3 \end{array} \right\} \text{ samat} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3. \quad (2 \text{ p.})$$

$$f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 5 = 3. \quad (1 \text{ p.})$$

Koska  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$ , niin funktio  $f$  on jatkuva kohdassa  $x = 4$ . (1 p.)