MAA13 (Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi)
Välitesti 2 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!
Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Olkoon $f(x) = -2x^3 + 4$.

   a) Osoita, että funktiolla $f(x)$ on olemassa käänteisfunktio. (2 p.)

   b) Mikä on käänteisfunktion lauseke $f^{-1}(x)$? (2 p.)

   c) Laske arvot $f(2)$ ja $f^{-1}(-12)$. (2 p.)

   d) Laske käänteisfunktion derivointikaavalla $(f^{-1})'(6)$. (2 p.)

a)

$f(x) = -2x^3 + 4$

$f'(x) = -6x^2 \leq 0$ (1 p.)

Siis $f(x)$ on aidosti vähenevä, joten sillä on käänteisfunktio. (1 p.)

b)

$y = f(x)$

$y = -2x^3 + 4 \quad ||$ Ratkaistaan x

$2x^3 = 4 - y \quad ||:2$

$x^3 = \dfrac{4-y}{2}$ (1 p.)

$x = \sqrt[3]{\dfrac{4-y}{2}}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{4-x}{2}}}}$ (1 p.)

c)

$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 4 = -16 + 4 = \underline{\underline{-12}}$ (1 p.)

$f^{-1}(-12) = \sqrt[3]{\dfrac{4-(-12)}{2}} = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$ (1 p.)

d) Käänteisfunktion derivointikaava: $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $y_0=f(x_0)$.

Nyt $y_0=6$. Ratkaistaan tarvittava x_0:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0)\\
6 &= -2x_0^{\,3}+4\\
2x_0^{\,3} &= -2\\
x_0^{\,3} &= -1 \,\|\, \sqrt[3]{\;}\\
x_0 &= -1 \qquad \text{(1 p.)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(6) &= \frac{1}{f'(-1)}\\
&= \frac{1}{-6\cdot(-1)^2}\\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{6}}} \qquad \text{(1 p.)}
\end{aligned}
$$

2. Olkoon $f(x)=x^5+2x-2$. Funktiolla f on kaikkialla määritelty käänteisfunktio f^{-1}.

   a) Päättele, mitä on $f^{-1}(-5)$. (2 p.)

   b) Mikä on käänteisfunktion nollakohta? (2 p.)

a)

$f^{-1}(-5)=x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=-5$

Huomataan, että $f(x)=-5$, kun $x=-1$:

$f(-1)=(-1)^5+2\cdot(-1)-2=-5$ (1 p.)

Siispä $f^{-1}(-5)=\underline{\underline{-1}}$ (1 p.)

b)

Käänteisfunktion nollakohta on se muuttujan y arvo, jolla $f^{-1}(y)=0$ eli $f(0)=y$.

$f(0)=0^5+2\cdot 0-2=-2$. (1 p.)

Siispä käänteisfunktion nollakohta on $\underline{\underline{-2}}$. (1 p.)