MAA13 (Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi)
Välitesti 3 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!
Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Laske ilman laskinohjelmistoa $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x^2}{2x^2-x}$. (4 p.)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-4x^2}{2x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\frac{5}{x^2}-4)}{x^2(2-\frac{1}{x})} \qquad \text{(1 p.)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\boxed{\frac{5}{x^2}}^{\nearrow 0}-4}{2-\boxed{\frac{1}{x}}^{\nearrow 0}} \qquad \text{(2 p. perustelut!)}$$

$$=\frac{0-4}{2-0}$$

$$=\underline{\underline{-2}} \qquad \text{(1 p.)}$$

2. Laske *ilman laskinohjelmistoja* epäoleellinen integraali $\int_{-1}^{0} -\frac{1}{x^5}\,dx$. Suppeneeko integraali? (4 p.)

$$\int_{-1}^{0} -\frac{1}{x^5}\,dx = \int_{-1}^{0} -x^{-5}dx$$

$$= \lim_{s\to 0^-} \int_{-1}^{s} -x^{-5}dx \qquad \text{(1 p.)}$$

$$= \lim_{s\to 0^-} \Big/_{-1}^{s} -\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}$$

$$= \lim_{s\to 0^-} \Big/_{-1}^{s} \frac{1}{4x^4} \qquad \text{(1 p.)}$$

$$= \lim_{s\to 0^-} (\underbrace{\boxed{\frac{1}{4s^4}} - \frac{1}{4(-1)^4}}_{\to\infty}) \qquad \text{(1 p.)}$$

$$= \infty$$

$\Rightarrow$ <u>Integraali hajaantuu</u> (1 p.)

3. Satunnaismuuttujan $X$ tiheysfunktio on $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{a}{x^4}, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Määritä luku $a$. (2 p.)

b) Määritä satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo. (2 p.)

a) Käydään läpi tiheysfunktion ehdot:

$\boxed{1.}$ $f(x) \geq 0$, kun $a \geq 0$

$\boxed{2.}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^4}\,dx = 1 \qquad \text{(1 p.)}$$

$$\text{solve}\left(\int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^4}\,dx = 1, a\right) \qquad a=3$$

Vastaus: <u>$a = 3$</u>. (1 p.)

b) Odotusarvo $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int_{1}^{\infty} x\cdot \frac{3}{x^4}dx$ (1 p.)

$$\int_{-\infty}^{1}(x\cdot 0)\mathrm{d}x+\int_{1}^{\infty}\left(x\cdot \frac{3}{x^4}\right)\mathrm{d}x \qquad \frac{3}{2}$$

Vastaus: $E(X)=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ (1 p.)