MAA13 (Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi)
Välitesti 4 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata! Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Tarkastellaan lukujonoa $a_n = \dfrac{2n^4+3n^2+1}{n^4+n^2}$.

   a) Mikä on lukujonon 10. jäsen? (1 p.)

   b) Osoita, että lukujono on aidosti vähenevä. (2 p.)

   c) Laske ilman laskinohjelmistoa lukujonon raja-arvo. (2 p.)

   d) Piirrä lukujonon kuvaaja. (1 p.)

a)

$$a_n = \frac{2n^4+3n^2+1}{n^4+n^2}$$

$$a_{10} = \frac{2\cdot 10^4+3\cdot 10^2+1}{10^4+10^2} = \frac{20301}{10100} = \frac{201}{100} = \underline{\underline{2,01}} \qquad \text{(1 p.)}$$

b)

Lukujonon jäsenet a_n ovat funktion $f(x) = \dfrac{2x^4+3x^2+1}{x^4+x^2}$ arvoja, kun $x = 1, 2, 3, \ldots$ (1 p.)

Kun $x \geq 1$, funktio on määritelty ja derivoituva.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2\cdot x^4+3\cdot x^2+1}{x^4+x^2}\right) \qquad \frac{-2}{x^3}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0,\ \text{kun } x \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \text{ on aidosti vähenevä funktio} \\ &\Rightarrow \quad \text{lukujono } a_n \text{ on aidosti vähenevä.} \end{aligned}\right\} \text{(1 p.)}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^2+1}{n^4+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^2+1}{n^4+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}\,(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4})}{\cancel{n^4}\,(1+\frac{1}{n^2})} \qquad \text{(1 p.)}$$

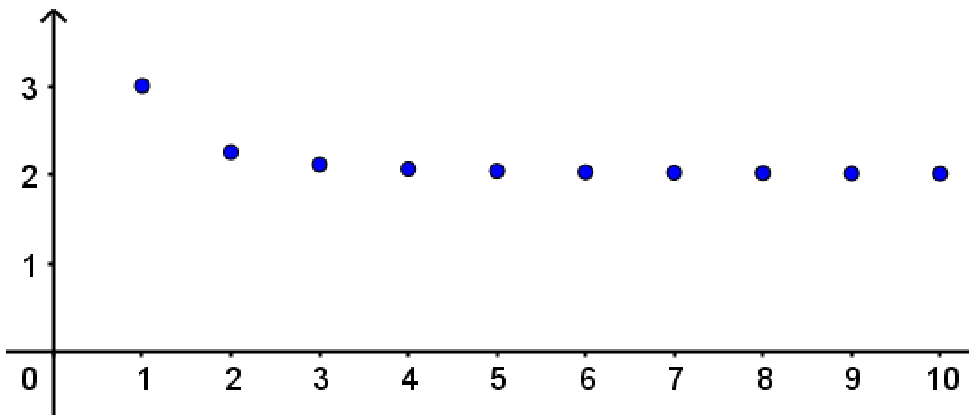
0 0 0

$$= \frac{2}{1}$$

$$= \underline{\underline{2}} \qquad \text{(1 p.)}$$

d) Piirretään kuvaaja GeoGebralla komennolla

Jono((n, (2*n^4 + 3n^2 + 1) / (n^4 + n^2)), n, 1, 10)



(1 p.)

2. Tarkastellaan geometrista sarjaa: $2 + 1,6 + 1,28 + 1,024 + \ldots$

a) Osoita, että sarja suppenee. (2 p.)

b) Laske sarjan 20 ensimmäisen jäsenen osasumma S_{20} kahden desimaalin tarkkuudella. (2 p.)

c) Laske sarjan summa. (2 p.)

a)

Geometrisen sarjan suhdeluku on $q = \frac{1,6}{2} = 0,8.$ (1 p.)

Koska $-1 < 0,8 < 1$, niin geometrinen sarja suppenee. (1 p.)

b)

$$S_{20} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q} = \frac{2(1-0,8^{20})}{1-0,8} \qquad \text{(1 p.)}$$

$$= 9,884707\ldots$$

$$\approx \underline{\underline{9,88}} \qquad \text{(1 p.)}$$

c)

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-0,8} \qquad \text{(1 p.)}$$

$$= \underline{\underline{10}} \qquad \text{(1 p.)}$$