

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy - 10x + 30$.

a) Määritä funktion osittaisderivaattafunktiot. (2 p.)

$$\partial_x f(x, y) = \underline{2x + y - 10} \quad (1 \text{ p.})$$

$$\partial_y f(x, y) = -2y + x = \underline{x - 2y} \quad (1 \text{ p.})$$

b) Määritä funktion ainoa kriittinen piste. (2 p.)

Ratkaistaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ p.})$$

$$\text{solve} \left(\begin{cases} 2 \cdot x + y - 10 = 0 \\ x - 2 \cdot y = 0 \end{cases}, \{x, y\} \right) \quad x=4 \text{ and } y=2$$

Funktion kriittinen piste on $\underline{(4, 2)}$. (1 p.)

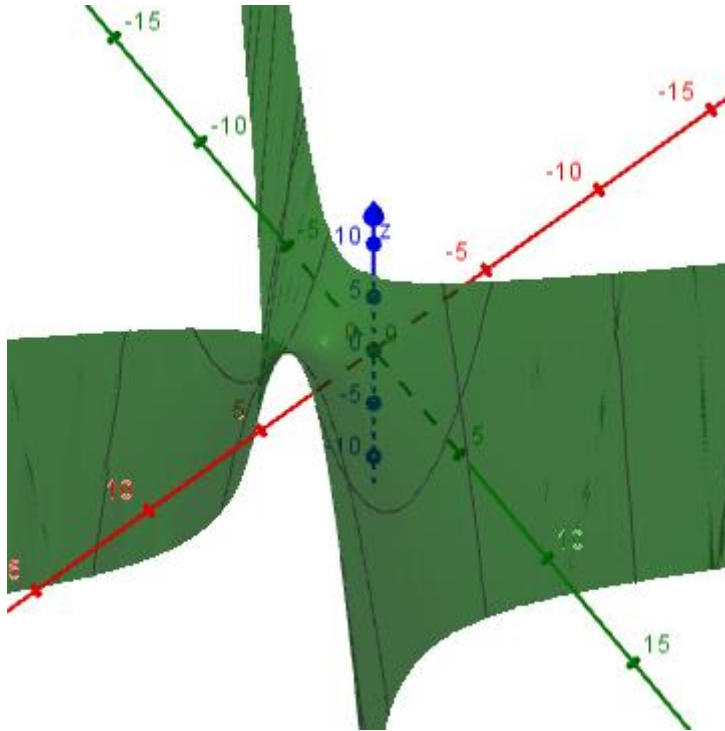
c) Mikä on funktion f arvo kriittisessä pisteessä? (2 p.)

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy - 10x + 30$$

$$f(4, 2) = 4^2 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 30 \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \underline{10} \quad (1 \text{ p.})$$

d) Piirrä funktion f kuvaaja ja selvitä kuvaajan avulla kriittisen pisteen laatu. (2 p.)



(1 p.)

Kuvaajan perusteella kriittinen piste on satulapiste.

(1 p.)

e) Määritä funktion f gradienttivektori kohdassa $(0, 2)$. (2 p.)

$$\nabla f(x, y) = \partial_x f(x, y)\vec{i} + \partial_y f(x, y)\vec{j}$$

$$\nabla f(0, 2) = \partial_x f(0, 2)\vec{i} + \partial_y f(0, 2)\vec{j} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= (2 \cdot 0 + 2 - 10)\vec{i} + (0 - 2 \cdot 2)\vec{j}$$

$$= \underline{\underline{-8\vec{i} - 4\vec{j}}} \quad (1 \text{ p.})$$

f) Mikä on funktion suurimman kasvun nopeus kohdassa $(0, 2)$? (2 p.)

Suurimman kasvun nopeus kohdassa $(0, 2)$ on siinä kohdassa olevan gradienttivektorin pituus:

$$|\nabla f(0, 2)| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = \underline{\underline{4\sqrt{5}}} \quad (\approx 8,94) \quad (2 \text{ p.})$$