MAA15 – Vektorilaskennan jatkokurssi, tehtävämoniste

Tason ja avaruuden vektorit

1. Olkoon A(2, -2, 4) ja B(5, -1, -3).
   a) Muodosta pisteen A paikkavektori.
   b) Muodosta vektori $\overline{AB}$.
   c) Laske vektorin $\overline{AB}$ pituus.
   d) Muodosta vektorin $\overline{AB}$ kanssa vastakkaissuuntainen yksikkövektori.

2. Merkitään suunnikkaan ABCD sivuvektoria $\overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{AD} = \overline{b}$. Piste P jakaa sivun CD suhteessa 3 : 1 ja piste Q jakaa sivun CB suhteessa 1 : 2. Ilmaise vektorit $\overline{AP}, \overline{AQ}$ ja $\overline{QP}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

3. Piste P jakaa janan AB suhteessa 3 : 1. Määritä P:n koordinaatit, kun A=(3,0,1) ja B=(-5,4,11).

4. Olkoot vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ erisuuntaiset. Jaa vektori $4\overline{u} - 14\overline{v}$ vektorien $\overline{u} + \overline{v}$ ja $\overline{u} - \overline{v}$ suuntaisiin komponentteihin.

5. Kolmiossa ABC piste P jakaa sivun AC suhteessa 3 : 1 ja piste R sivun BC samoin suhteessa 3 : 1.
   a) Esitä vektori $\overline{PR}$ vektorien $\overline{AB} = \overline{u}$ ja $\overline{AC} = \overline{v}$ avulla.
   b) Laske jakosuhde PR : AB.

6. Ovatko vektorit $15\overline{i} + 9\overline{j} - 6\overline{k}$ ja $-40\overline{i} - 24\overline{j} + 16\overline{k}$ samansuuntaiset, vastakkaissuuntaiset vaiko erisuuntaiset?

Pistetulo, vektorien kohtisuoruus, vektorien välinen kulma

7. Olkoon vektori $\overline{a} = 10\overline{i} + 5\overline{j}$ ja vektori $\overline{b} = 2\overline{i} + 11\overline{j}$. Ovatko vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ summa ja erotus kohtisuorassa toisiaan vastaan?

8. Määritä reaaliluku t siten, että vektorit $\overline{a} = 21\overline{i} - 28\overline{j}$ ja $\overline{b} = 7\overline{i} + t\overline{j}$ ovat
a) yhdensuuntaisia, b) kohtisuorassa toisiaan vastaan.

9. Olkoot vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat erisuuntaiset. Millä vakion t arvolla vektorit $\overline{u} = t\overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{v} = \overline{a} + t\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset?

10. Laske $\overline{a} \cdot \overline{b}$, kun yksikkövektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat tasasivuisen kolmion peräkkäisinä sivuina.

11. Laske vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{a} - \overline{b}$ välinen kulma, kun $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{b} = \overline{j} + 4\overline{k}$.

12. Suuntaissärmiön ABCD-A'B'C'D' kärjestä A lähtevät särmävektorit ovat $\overline{AB} = 2\overline{i} + \overline{j}, \overline{AD} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{AA'} = 3\overline{j} + 4\overline{k}$. Kuinka suuren kulman tahkon ABCD lävistäjä AC muodostaa suuntaissärmiön lävistäjän AC' kanssa?

13. Laske sen kolmion pinta-ala, jonka kärjet ovat pisteissä A(1, 1, 2), B(2, –3, 6) ja C(3, 2, –2).

Suorat ja tasot

14. Määritä pisteiden $P_1(1, 2, 4)$ ja $P_2(-3, 6, -5)$ kautta kulkevan SUORAN vektori– ja parametriyhtälöt.

Merkitään suoran yleinen piste $P(x, y, z)$.

15. a) Määritä pisteiden A(1, 2, 8), B(– 1, 1, 4) ja C(2, – 1, 3) määräämän tason vektoriyhtälö.

b) Onko piste D(3, – 2, 2) tässä tasossa?

16. Suora kulkee pisteiden A(2, – 1, 1) ja B(8, 3, 9) kautta. Osoita, että suora on tasolla $2x - y - z - 4 = 0$.

17. Määritä sen tason normaalimuotoinen yhtälö, joka kulkee pisteen P(1, -3, 2) kautta ja on kohtisuorassa tämän pisteen paikkavektoria vastaan.

18. a) Määritä tason $2x - 3y + z + 6 = 0$ jokin normaalivektori.

b) Missä pisteissä taso $2x - 3y + z + 6 = 0$ leikkaa koordinaattiakselit?

19. Määritä sen tason normaalimuotoinen yhtälö, joka on tason $x + 3y - 2z - 8 = 0$ suuntainen ja kulkee pisteen (-2, 1, -3) kautta.

20. Osoita, että tasot $2x - 4y + 6z - 7 = 0$ ja $-x + 2y - 3z + 9 = 0$ ovat yhdensuuntaiset.

21. a) Määritä pisteiden A(1, 2, 0), B(-1, 3, -2) ja C(2, 1, 3) kautta kulkevan tason normaalimuotoinen yhtälö.

b) Onko piste (2, 3, -5) tällä tasolla?

22. Yo-K09

8. Taso T kulkee pisteiden $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ ja $C = (1, 2, 3)$ kautta. Muodosta tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.

23. Yo-K07

4. Määritä jokin pisteiden $A = (2, 3, 6)$ ja $B = (4, -7, -3)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori ja muodosta suoran parametriesitys. Määritä suoran ja xy-tason leikkauspiste.

24. Yo-S06

8. Määritä muodossa $ax + by + cz = 1$ sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(1, 1, 1)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x - y = 2$.

25. Yo-K03

7. Suora on vektorin $3\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ suuntainen ja kulkee pisteen $(2, 3, 7)$ kautta. Määritä sen ja tason $x + 2y + z = 1$ leikkauspiste.

Skalaariprojektio, vektoriprojektio

26. Olkoon vektorit $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{b} = 4\overline{i}$.

a) Määritä vektorin $\overline{a}$ skalaariprojektio vektorilla $\overline{b}$.

b) Määritä vektorin $\overline{a}$ vektoriprojektio $\overline{a}_b$ vektorilla $\overline{b}$.

c) Piirrä vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{a}_b$ samaan koordinaatistoon ja alkamaan samasta pisteestä.

27. Kuinka pitkä on vektorin $\overline{a} = -\overline{i} + 7\overline{j} - 7\overline{k}$ projektio vektorilla $\overline{b} = 8\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$?

28. Määritä vektorin $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$ vektoriprojektio vektorilla $\overline{b} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.

29. a) Määritä pisteen $A(6, -4, 4)$ projektiopiste P pisteiden $B(2, 1, 2)$ ja $C(3, -1, 4)$ kautta kulkevalla suoralla.

b) Huomaa, kuinka kätevää nyt on määrittää pisteen etäisyys suorasta! Eli, laske pisteen A etäisyys pisteiden B ja C kautta kulkevasta suorasta.

30. Todista, että vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ skalaariprojektion voi laskea myös kaavalla: $a_b = \bar{a} \bullet \overline{b^0}$, missä $\overline{b^0}$ on vektorin $\bar{b}$ suuntainen yksikkövektori.

31. a) Todista, että vektorin $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pituuden voi laskea myös kaavalla: $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \bullet \bar{a}}$.

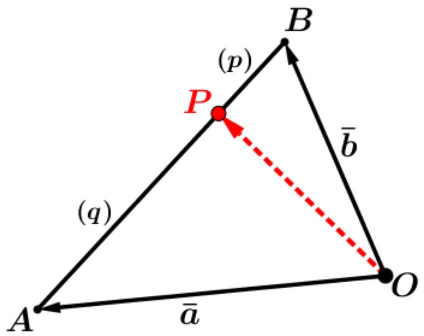
b) Todista, että vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vektoriprojektion voi laskea myös kaavalla: $\bar{a}_b = \dfrac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|b|^2}\bar{b}$.

Jakosuhdevektori

JAKOSUHDELAUSE

Jos janan AB piste P jakaa janan AB suhteessa $q : p$, niin

$$\boxed{\overline{OP} = \frac{p\bar{a} + q\bar{b}}{p+q}}$$



32. Janan AB piste P jakaa janan suhteessa $2:3$. Ilmaise vektori $\overline{OP}$ vektoreiden $\bar{a} = \overline{OA}$ ja $\bar{b} = \overline{OB}$ avulla.

33. Piirretään samasta pisteestä alkavat vektorit janan päätepisteisiin ja janan keskipisteeseen. Todista: Janan keskipisteeseen piirretty vektori on janan päätepisteisiin piirrettyjen vektorien keskiarvo.

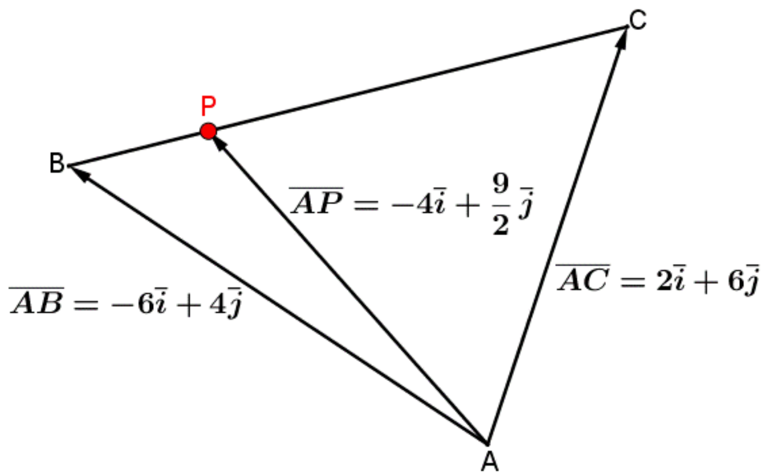
34. Kolmion huipusta lähtevät sivujanavektorit ovat $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$. Muodosta kolmion huipusta kannalle piirretyn keskijanavektorin lauseke.

35. Piste P jakaa pisteiden $A(1,2,-4)$ ja $B(2,-2,1)$ välisen janan AB suhteessa $2:1$.

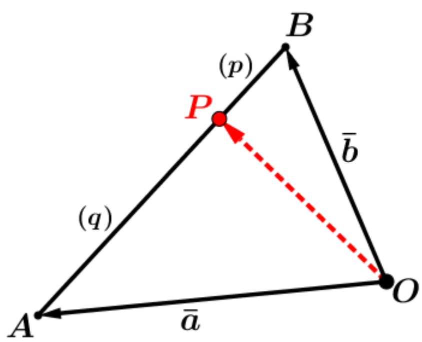
a) Määritä pisteen P paikkavektori $\overline{OP}$.

b) Määritä piste P.

36. Missä suhteessa janan BC piste P jakaa janan BC?



37. Todista jakosuhdelause $\overline{OP} = \dfrac{p\bar{a} + q\bar{b}}{p+q}$.



Determinantit

38. Laske determinantin arvo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

39. Laske determinantin arvo $\begin{vmatrix} V & E \\ L & IL \end{vmatrix}$, kun $VI - E = 6$.

40. Osoita esimerkillä, että determinantteja ei voida laskea yhteen seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{vmatrix}.$$

41. Ilmaise $(x-y)(x+y)$ kaksirivisenä determinanttina. Vihje: muistikaava!

42. Laske determinantin arvo $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

43. Mitä vektoria determinantti $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ esittää?

44. Lineaarisen normaalimuotoisen yhtälöparin voi ratkaista determinanteilla seuraavasti:

yhtälöparilla $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases}$, jossa

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ja } D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (D\neq 0)$$

Ratkaise *determinanteilla* yhtälöpari $\begin{cases} -3x+y-6=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$.

45. Todista, että ensimmäisestä sarakkeesta voi ottaa mahdollisen yhteisen tekijän determinantin kertoimeksi seuraavasti $\begin{vmatrix} xa & b & c \\ xd & e & f \\ xg & h & i \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Vektori- eli ristitulo

46. Olkoon $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$.

a) Muodosta $\overline{a} + \overline{b}$.

b) Laske $\overline{a} \bullet \overline{b}$.

c) Muodosta $\overline{a} \times \overline{b}$.

47. Ristitulo ei ole vaihdannainen eli $\overline{a} \times \overline{b} \neq \overline{b} \times \overline{a}$. Olkoon $\overline{a} = \overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$.

a) Laske $\overline{a} \times \overline{b}$

b) Laske $\overline{b} \times \overline{a}$.

48. Osoita ristitulon avulla, että vektorit $\overline{a} = 4\overline{i} - 2\overline{j} - 8\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j} + 2\overline{k}$ ovat yhdensuuntaiset.

49. Määritä ne yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa origon sekä pisteiden A(-2, 0, 1) ja B(3, 4, -2) kautta kulkevaa tasoa vastaan.

50. Muodosta yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa pisteiden A = (1, 1, 1), B = (2, 3, 4) ja C = (7, 6, 5) muodostamaa tasoa vastaan.

51. Laske sen kolmion ala, jonka kärkinä ovat pisteet A(1, 0, 2), B(1, -2, 3) ja C(4, 2, 0).

52. Suunnikkaassa ABCD on lävistäjävektorit $\overline{AC} = 3\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{BD} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$. Laske suunnikkaan ala.

53. Määritä pisteiden A(1, 2, 0), B(-1, 3, -2) ja C(2, 1, 3) kautta kulkevan tason normaalimuotoinen yhtälö $ax + by + cz + d = 0$.

54. Todista yhdensuuntaisuuslause: $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$. (vihje: laske ristitulo vektoreille $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ ja $\overline{b} = t\overline{a} = tx_1\overline{i} + ty_1\overline{j} + tz_1\overline{k}$)

Skalaarikolmitulo

55. Tutki skalaarikolmitulolla, sijaitsevatko pisteet A = (1, 1, 1), B = (2, -2, 0), C = (-1, 2, -2) ja D = (-9, 11, -9) samassa tasossa?

56. Määritä vakio *a* siten, että vektorit $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{c} = a\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$ sijaitsevat samassa tasossa.

57. Laske vektorien $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 4\overline{k}$ ja $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ määräämän suuntaissärmiön tilavuus.

58. Tetraedrin kärkinä ovat pisteet A(1, -2, -3), B(2, -2, 0), C(4, 0, -6) ja D(5, -4, -2). Laske tetraedrin tilavuus.

59. Suuntaissärmiön pohjasärminä ovat vektorit $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}$ ja $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$ sekä sivusärmänä vektori $\overline{c} = 4\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$. Laske suuntaissärmiön a) tilavuus b) pohjan pinta-ala c) korkeus.

60. Origosta alkavat vektorit $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ määräävät tason. Laske pisteen P(-2, 1, 3) etäisyys kyseisestä tasosta. (Vihje: Ajattele tasoa suuntaissärmiön pohjaksi ja pisteen etäisyyttä korkeudeksi)

61. Todista, että skalaarikolmitulon saa kätevästi determinantilla eli, että vektoreille $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ ja $\overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}$ pätee:

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \bullet \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Eri lukujärjestelmät

62. Luettele luvut 1 – 10 binäärilukuina.

63. Luettele luvut 1 – 10 viisikantaisen lukujärjestelmän lukuina.

64. Mikä kymmenjärjestelmän luku on binääriluku 110010.

65. Muuta luku 46 binääriluvuksi.

66. Muuta luku 10325_6 kymmenjärjestelmän luvuksi.

67. Muuta heksadesimaaliluku $3A1E2$ kymmenjärjestelmän luvuksi.

68. Muuta luku 3010 heksadesimaaliluvuksi.

69. Muuta 203_5 a) binääriluvuksi. b) heksadesimaaliluvuksi.

70. Laske allekkain a) $110_2 - 11_2$ b) $11001_2 - 110_2$.

71. Laske allekkain heksadesimaalilukujen erotus $2C1 - A2$.

Pascalin kolmio ja binomikaava

72. Kirjoita Pascalin kolmion 11. rivi.

73. Laske Pascalin kolmion avulla $(x+y)^5$.

74. Laske Pascalin kolmion avulla $(x-y)^3$.

75. Laske Pascalin kolmion avulla $(3x+2)^4$.

76. Laske Pascalin kolmion avulla $(2x-3)^6$.

77. Binomikertoimen voi laskea kaavalla: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$. Laske ilman laskinta $\binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

78. Todista, että $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

79. Laske ilman laskinta $\binom{101}{2}$.

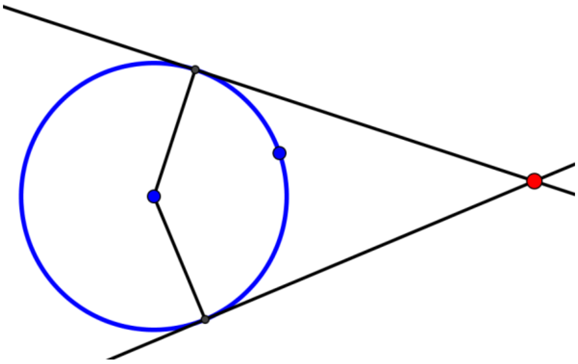
80. Laske a) $\binom{n}{0}$ b) $\binom{n}{1}$.

81. Binomikaava on $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$. Laske binomikaavalla $(x+y)^3$.

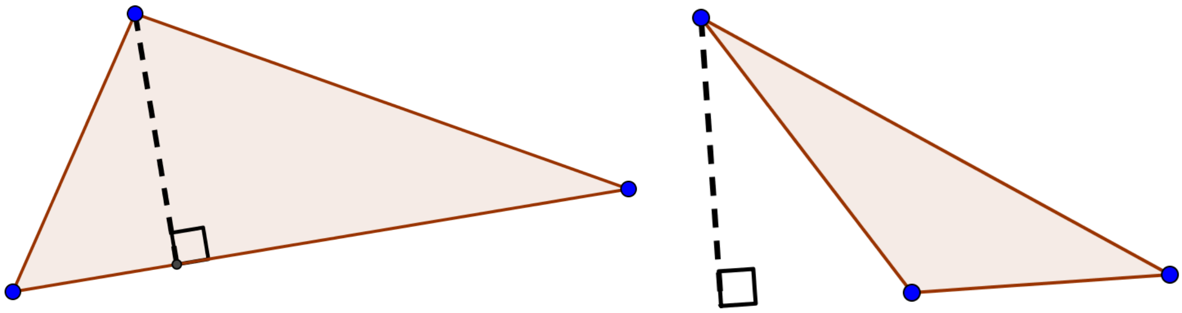
82. Päättele binomikaavan avulla, mikä on polynomin $(x+6)^{10}$ kahdeksannen asteen termi.

GeoGebra-harjoituksia

83. Piirrä GeoGebralla ympyrä ja sen ulkopuolelle yksi piste. Piirrä tästä ulkopuolisesta pisteestä ympyrälle tangentit. Piirrä ympyrän keskipisteestä säteet tangenttien sivuamispisteisiin. Kun liikutat ulkopuolista pistettä tai muutat ympyrää, on tangenttien ja säteiden säilyttävä "muutoksessa" mukana!



84. Piirrä GeoGebralla kolmio ABC ja siihen kärjestä C lähtevä korkeusjana kannalle AB. Huomaa, että kun muutat kolmion muotoa sen kärkipisteistä, niin korkeusjanan on "pysyttävä mukana" muutoksessa. Yritä tehdä ratkaisustasi myös sellainen, että korkeusjana tulee kannan jatkeelle kantakulman ollessa tylppä.



85. Piirrä GeoGebralla kolmio ja sen jokaiselle sivulle keskinormaali. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on keskinormaalien leikkauspiste ja eräs kehän piste on jokin kolmion kärkipisteistä. Mitä huomaat?

86. Tee GeoGebralla konstruktio, joka havainnollistaa ns. Thaleen lausetta: "puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma".

87. Tee GeoGebralla 3 liukusäädintä a, b ja c. Tee liu'uista sellaiset, että niiden arvoa voi muuttaa välillä $[-4,4]$. Muodosta paraabelit $y=ax^2+bx+c$ ja $x=ay^2+by+c$. Tutki liukujen avulla, kuinka kertoimet vaikuttavat paraabeleihin.

88. Tee GeoGebralla liuku r, jonka arvo on *kokonaisluku* välillä $[-5,5]$. Tutki eksponentin r vaikutusta funktion $f(x)=x^r$ kuvaajaan.

89. Piirrä GeoGebralla paloittain määritellyn funktion $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{kun } x\le 2 \\ -x+4, & \text{kun } x>2 \end{cases}$ kuvaaja. Käytä GeoGebran *Jos(<Ehto>, <Niin>, <Muuten>)* –komentoa.

90. Piirrä GeoGebran 3D-piirtoalueessa kuutio, jonka särmän pituus on 2. Piirrä kuution sisälle mahdollisimman suuri pallo.

91. Ratkaise GeoGebralla: määritä sen tason normaalimuotoinen yhtälö, joka on tason $x+3y-2z-8=0$ suuntainen ja kulkee pisteen (-3, 1, 2) kautta.

VASTAUKSET

1.

$a)\ \overline{OA} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$

$b)\ \overline{AB} = 3\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$

$c)\ \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{59}$

$d)\ -\frac{3}{\sqrt{59}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{59}}\bar{j} + \frac{7}{\sqrt{59}}\bar{k}$

2.

$\overline{AP} = \bar{b} + \frac{1}{4}\bar{a}$

$\overline{AQ} = \bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b}$

$\overline{QP} = \frac{1}{3}\bar{b} - \frac{3}{4}\bar{a}$

3. $P = \left(-3{,}3{,}8\frac{1}{2}\right)$

4. $\bar{a} = -5(\bar{u} + \bar{v}) + 9(\bar{u} - \bar{v})$

5. a) $\frac{1}{4}\bar{u}$ b) 1 : 4

6. Vastakkaissuuntaiset

7. On

8. a) $t = -\frac{28}{3}$ b) $t = \frac{21}{4}$

9. t = -1

10. $-\frac{1}{2}$

11. $49{,}8°$

12. $30{,}2°$

13. $A = \frac{3\sqrt{41}}{2}$

14.

Vastaus: $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}+t(4\bar{i}-4\bar{j}+9\bar{k})$, $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-4t, \\ z = 4+9t \end{cases}$ t reaaliluku

15. a) $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} = \bar{i}+2\bar{j}+8\bar{k} + s(-2\bar{i}-\bar{j}-4\bar{k}) + t(\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k})$. b) On

16. Suora on tasolla

17. $x-3y+2z-14=0$

18. a) $n=2\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ b) (-3,0,0), (0,2,0) ja (0,0,-6)

19. $x+3y-2z-7=0$

20. Tasojen normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset

21. a) $x+4y+z-9=0$ b) On tasolla

22. $12x+9y+2z-36=0$

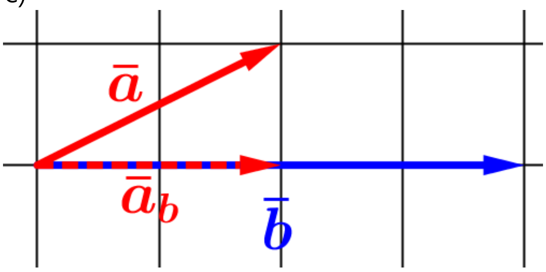
23. Parametriesitys $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-10t \\ z=6-9t \end{cases}$ ja leikkauspiste $\left(\frac{10}{3},-\frac{11}{3},0\right)$

24. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+z=1$

25. $\left(-\frac{13}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)$

26. a) 2 b) $2\bar{i}$

c)



27. 3

28. $-\frac{10}{9}\bar{i}+\frac{10}{9}\bar{j}-\frac{5}{9}\bar{k}$

29. a) $P=(4,-3,6)$ b) 3

30. Todista!

31. Todista!

32. $\frac{3}{5}\overline{a}+\frac{2}{5}\overline{b}$

33. $v=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$

34. $\frac{3}{2}\overline{i}+\frac{1}{2}\overline{j}+\frac{3}{2}\overline{k}$

35. a) $\frac{5}{3}\overline{i}-\frac{2}{3}\overline{j}-\frac{2}{3}\overline{k}$ b) $P=\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

36. 1 : 3

37. Todista!

38. -2

39. $6L$

40. Anna esimerkki!

41. $\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$

42. -23

43. $12\overline{i}+4\overline{j}+14\overline{k}$

44. $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

45. Todista!

46. a) $3\overline{i}+5\overline{j}-4\overline{k}$ b) 11 c) $7\overline{i}-5\overline{j}-\overline{k}$

47. a) $7\overline{i}-4\overline{j}-5\overline{k}$ b) $-7\overline{i}+4\overline{j}+5\overline{k}$

48. Ristitulo on nollavektori, joten vektorit ovat yhdensuuntaiset.

49. $\pm(\frac{4}{9}\bar{i}+\frac{1}{9}\bar{j}+\frac{8}{9}\bar{k})$

50. $\pm(\frac{-1}{\sqrt{6}}\bar{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k})$

51. $\frac{7}{2}$

52. $2\sqrt{6}$

53. $x+4y+z-9=0$

54. Muista todistaa lause kumpaankin ekvivalenssin suuntaan!

55. Pisteet sijaitsevat samassa tasossa.

56. a = -3

57. 17

58. $\frac{23}{3}$

59. a) 60 b) 15 c) 4

60. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

61. Todista, että yhtälön molemmat puolet ovat samat.

62. $1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010$

63. $1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20$

64. 50

65. 101110

66. 1421

67. 238050

68. BC2

69. a) 110101 b) 35

70. a) 11 b) 10011

71. 21F

72. 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

73. $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

74. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

75. $81x^4+216x^3+216x^2+96x+16$

76. $64x^6-576x^5+2160x^4-4320x^3+4860x^2-2916x+729$

77. 20

78. Todista, että yhtälön molemmat puolet ovat samat.

79. 5050

80. a) 1 b) n

81. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

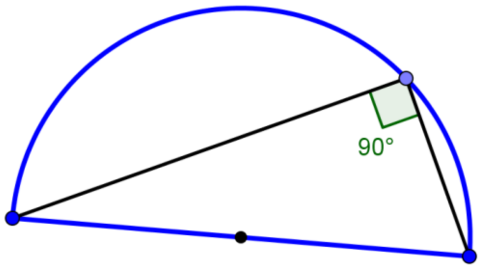
82. $1620x^8$

83. Just do it!

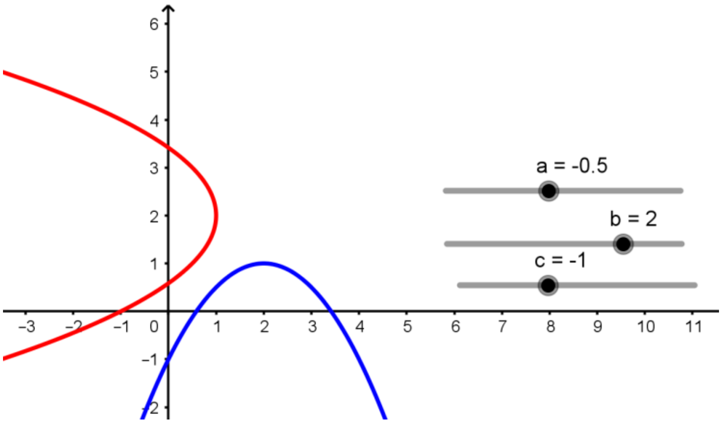
84. Just do it!

85. Ympyrä kulkee aina muidenkin kolmion kärkipisteiden kautta! Siis keskinormaalien leikkauspiste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste!

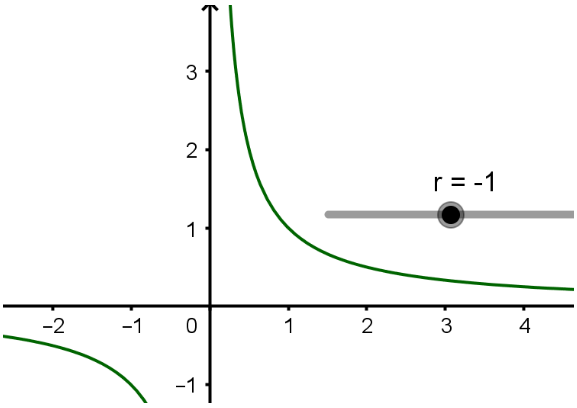
86.



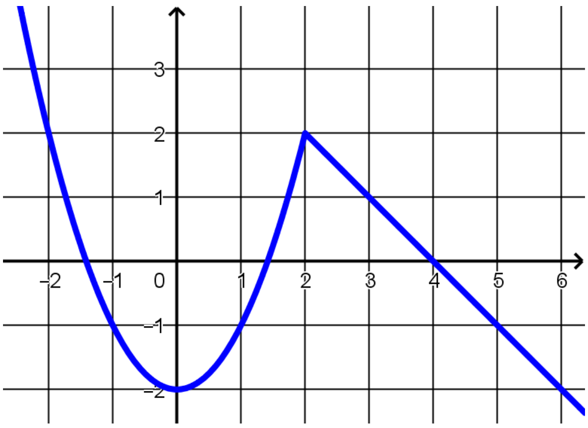
87.



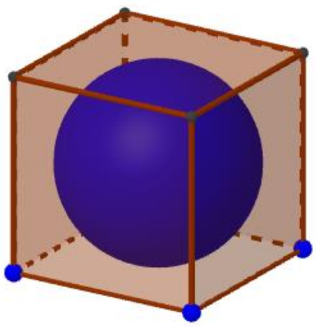
88.



89.



90.



91. $x + 3y - 2z + 4 = 0$