8. Murtolauseke*

Jos P ja Q ovat polynomeja $(Q \neq 0)$, niin lauseketta, joka on muotoa tai joka voidaan muuntaa muotoon

$$\frac{P}{Q}$$

sanotaan *murtolausekkeeksi*.

Murtolauseke muodostuu siis jaettaessa polynomi toisella polynomilla. Murtolausekkeet käyttäytyvät samoin kuin murtoluvut ja niille on voimassa samat laskusäännöt. Osoittajassa ja nimittäjässä on vain yksittäisten lukuarvojen sijasta polynomit. Murtoluku on mahdoton, jos sen nimittäjässä on luku nolla, sillä nollalla ei voi jakaa. Samasta syystä murtolauseke on määritelty muualla, paitsi nimittäjän nollakohdissa.

Murtolausekkeiden laskusäännöt

- Ennen kuin murtolausekkeita voi laskea yhteen tai vähentää toisistaan, on ne muutettava samannimisiksi laventamalla ja/tai supistamalla.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{ja} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

- Murtolausekkeet kerrotaan keskenään siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- Murtolauseke jaetaan toisella murtolausekkeella siten, että se kerrotaan jakajan käänteisellä murtolausekkeella.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Esimerkki 1.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\overset{5)}{=}\frac{2}{3}+\overset{3)}{\frac{1}{5}}=\frac{5\cdot 2+3\cdot 1}{15}=\frac{13}{15}$

b) $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\overset{5)}{=}\frac{x}{3}-\overset{3)}{\frac{y}{5}}=\frac{5x-3y}{15}$

c) $\frac{x}{3} \cdot \frac{y}{5} = \frac{x \cdot y}{3 \cdot 5} = \frac{xy}{15}$

d) $\frac{x}{3} : \frac{y}{5} = \frac{x}{3} \cdot \frac{5}{y} = \frac{5x}{3y}$

Esimerkki 2.

Millä *x*:n arvoilla murtolauseke $\frac{3x-4}{-4x+8}$ on määritelty?

Ratkaisu:

Murtolauseke on määritelty muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Selvitetään nimittäjän nollakohta.

$$-4x+8=0$$
$$-4x=-8 \quad |: (-4)$$
$$x=\frac{-8}{-4}$$
$$x=2$$

Vastaus: Murtolauseke on määritelty, kun $x \neq 2$.

Tehtäviä

171.
Muunna sekaluvuksi.

a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{12}{5}$

c) $\frac{100}{6}$

d) $\frac{14}{3}$

172.
Laske.

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}+1\frac{2}{3}$

c) $\frac{7}{2}-2$

d) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$

173.
Laske.

a) $\frac{4}{5}\cdot 2$

b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{7}:3$

174.
Laske.

a) $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{5}:\frac{1}{2}$

175.
Laske.

a) $11\frac{1}{7}+5\frac{3}{7}$

b) $7\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}$

c) $8-2\frac{3}{4}$

d) $6\frac{3}{5}-1\frac{1}{4}$

176.
Laske.

a) $\frac{5}{a}+\frac{2}{a}$

b) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

c) $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$

d) $\frac{7}{2b}-\frac{3}{b}$

177.
Onko murtolauseke määritelty kohdassa $x = 1$?

a) $\frac{2x-1}{3}$

b) $\frac{5}{x-1}$

c) $\frac{x-1}{2x}$

d) $\frac{x}{x^2+x-2}$

178.
Laske.

a) $\frac{x}{5}+\frac{x}{6}$

b) $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}$

c) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$

d) $\frac{x}{y}-\frac{a}{b}$

179.
Laske lausekkeen arvo, kun $x = 7$.

a) $\frac{2+x}{4}$

b) $\frac{x-8}{2}$

c) $\frac{3x}{5}$

d) $\frac{x}{2x}$

180.

Millä *x*:n arvolla murtolauseke on määritelty?

a) $\frac{x}{x}$

b) $\frac{2+x}{x+1}$

c) $\frac{-x-1}{2x}$

d) $\frac{5}{x-3}$

181.

Laske.

a) $\frac{a}{6}\cdot\frac{b}{2}$

b) $\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{5}$

c) $\frac{1}{6}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{a}{1}$

d) $6\cdot\frac{4}{x}$

182.

Muodosta ja sievennä murtolausekkeiden $\frac{a}{6}$ ja $\frac{2a}{3}$

a) summa
b) erotus
c) tulo
d) osamäärä.

183.

Sievennä.

a) $\frac{x}{2}:\frac{3}{x}$

b) $\frac{1}{y}:\frac{5}{4}$

c) $\frac{8}{y} : \frac{5}{x}$

d) $\frac{x}{9} : 3$

184.
Muodosta ja sievennä luvun *a* ja sen käänteisluvun
a) summa
b) erotus
c) tulo
d) osamäärä.

185.
Millä *x*:n arvolla murtolauseke on määritelty?
a) $\frac{2x^2 + x + 3}{x - 5}$
b) $\frac{12 - x}{\sqrt{(x-1)^2}}$
c) $\frac{4x}{|2x - 2|}$
d) $\frac{5}{2x - 8}$

186.
Radioaktiivisen aineen ytimistä puolet hajoaa tietyn pituisen ajan kuluessa toisten aineiden ytimiksi. Tätä aikaa sanotaan puoliintumisajaksi. Maaperästä irtoavan radonkaasun, radon-222:n, puoliintumisaika on 3,8 vuorokautta. Radon-222:ta on aluksi 1000 g, paljonko sitä on
a) 3,8 vuorokauden kuluttua
b) 7,6 vuorokauden kuluttua
c) 38 vuorokauden kuluttua?

187.

Nuotti	**Aika-arvo**
	1
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{16}$

Laske taulukon tietojen perusteella nuottien yhteenlasketut aika-arvot.

a)

b)

c)

d)

188.

Nuotin perässä oleva piste pidentää aika-arvoa puolella nuotin omasta aika-arvosta. Laske nuottien aika-arvot.

a)

b)

c)

d)

189.

Sievennä.

a) $\dfrac{2a-1}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}$

b) $\dfrac{5a+1}{a-1}+\dfrac{a+3}{a-1}$

190.

Määritä ne positiiviset, yksinkertaisimpaan muotoon supistetut murtoluvut, joiden osoittajan ja nimittäjän summa on 10. (yo syksy 1992)

191.

Laske murtoluvuilla ilman laskinta ja anna tulokset murtolukumuodossa supistettuina.

a) $-\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{2\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{4}+2\dfrac{1}{3}}$

(pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1991)

192.

Lausu $\dfrac{x}{y}$ mahdollisimman yksinkertaisena murtolukuna, kun $x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}$ ja $y=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{25}{24}$ (yo syksy 1974)

193.

Määritä $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, kun $x+y=52$ ja $xy=13$. (yo syksy 1995)

b) $x = 10$ tai $x = -10$
c) $x = 0$

168.
a) $x = 1$ tai $x = -2$
b) $x = 1 \pm \sqrt{3}$

169.
a) $x = \frac{1}{9}$
b) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{4}$

170.
Olkoon jäsenten lukumäärä x, saadaan yhtälö

$$\frac{192}{x} = \frac{192}{x+2} + 8 \,|\cdot x(x+2)$$

$$192(x+2) = 192x + 8x(x+2) \qquad \text{oltava } x \neq 0, x \neq -2$$

$$8x^2 + 16x - 384 = 0$$

$x = 6$ tai $x = -8$, joista ainoastaan positiivinen ratkaisu kelpaa lukumääräksi.
Vastaus: Jäseniä on 6.

171.
a) $2\frac{2}{3}$
b) $2\frac{2}{5}$
c) $16\frac{2}{3}$
d) $4\frac{2}{3}$

172.
a) $\frac{31}{35}$
b) $2\frac{7}{15}$
c) $1\frac{1}{2}$
d) $\frac{5}{6}$

173.
a) $1\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{7}$

174.

a) $-\frac{3}{10}$

b) $\frac{7}{10}$

c) $\frac{1}{10}$

d) $\frac{2}{5}$

175.

a) $16\frac{4}{7}$

b) $10\frac{7}{12}$

c) $5\frac{1}{4}$

d) $5\frac{7}{20}$

176.

a) $\frac{7}{a}$

b) $\frac{b-a}{ab}$

c) $\frac{3a+2b}{6}$

d) $\frac{1}{2b}$

177.

a) on

b) ei

c) on

d) ei

178.

a) $\frac{11x}{30}$

b) $\frac{x}{15}$

c) $\frac{3y+4x}{xy}$

d) $\frac{bx-ay}{by}$

179.

a) $\frac{9}{4}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{21}{5}$

d) $\frac{1}{2}$

180.

a) $x \neq 0$

b) $x \neq -1$

c) $x \neq 0$

d) $x \neq 3$

181.

a) $\frac{ab}{12}$

b) $\frac{a^2}{15}$

c) $\frac{ab}{18}$

d) $\frac{24}{x}$

182.

a) $\frac{a}{6}+\frac{2a}{3}=\frac{5a}{6}$

b) $\frac{a}{6}-\frac{2a}{3}=-\frac{a}{2}$

c) $\frac{a}{6}\cdot\frac{2a}{3}=\frac{a^2}{9}$

d) $\frac{a}{6}:\frac{2a}{3}=\frac{1}{4}$

183.

a) $\frac{x^2}{6}$

b) $\frac{4}{5y}$

c) $\frac{8x}{5y}$

d) $\frac{x}{27}$

184.

a) $a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}$

b) $a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}$

c) $a\cdot\frac{1}{a}=1$

d) $a:\frac{1}{a}=a^2$

185.

a) $x\neq 5$

b) $x\neq 1$

c) $x\neq 1$

d) $x\neq 4$

186.

a) 500 g

b) 250 g

c) 1 g

187.

a) $\frac{3}{2}$

b) 1

c) $\frac{5}{16}$

d) $\frac{9}{16}$

188.

a) $\frac{3}{32}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{3}{8}$

189.

a) $\frac{a-1}{a+2}$

b) $\frac{6a+4}{a-1}$

190.

Positiiviset murtoluvut, joiden summa on 10 ovat $\frac{1}{9},\frac{2}{8},\frac{3}{7},\frac{4}{6},\frac{5}{5},\frac{6}{4},\frac{7}{3},\frac{8}{2}$ sekä $\frac{9}{1}$. Näistä kaikki muut voidaan supistaa, paitsi $\frac{1}{9},\frac{3}{7}$ ja $\frac{7}{3}$.

191.

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{23}{31}$

192.

$\frac{x}{y}=-\frac{3}{5}$

193.

$\overset{y)}{\frac{1}{x}}+\overset{x)}{\frac{1}{y}}=\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}=\frac{y+x}{xy}=\frac{x+y}{xy}=\frac{52}{13}=4$

194.

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) –1

d) -5

195.

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) -1

196.