MAA3 (Geometria)
Kurssikoe

RATKAISUT

A-OSA

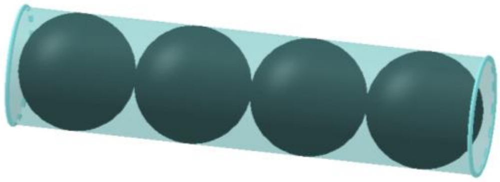
1. Muuta suluissa olevaan yksikköön **(6 p.)**

a) $5\ \text{mm}^3 = 0{,}000005\ \text{dm}^3 = 0{,}000005\ l = \underline{\underline{0{,}005\ \ (ml)}}$ (2 p.)

b) $512\ km^2 = \underline{\underline{51200\ \ (ha)}}$ (2 p.)

c) $0{,}035\ \text{dm} = \underline{\underline{3{,}5\ \ (mm)}}$ (2 p.)

2. Täysinäisessä tiiviisti pakatussa ympyrälieriön muotoisessa säilytyskotelossa on neljä tennispalloa, joiden säde = *r*. **(6 p.)**



a) Kuinka suuri osa pallojen yhteistilavuus on kotelon tilavuudesta? Anna vastaus murtolukuna.

b) Kumpi on suurempi – pallojen yhteispinta-ala vai kotelon vaipan pinta-ala?

a) Pallon säde = *r*.

$$\text{V}_{\text{pallot}} = 4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{16\pi r^3}{3} \qquad \text{V}_{\text{lieriö}} = \pi r^2\cdot h = \pi r^2\cdot 8r = 8\pi r^3$$

$$\text{Tilavuuksien suhde} = \frac{16\pi r^3}{3} : \frac{8\pi r^3}{1} = \frac{16\cancel{\pi r^3}}{3}\cdot\frac{1}{8\cancel{\pi r^3}} = \frac{16^{(8}}{24} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

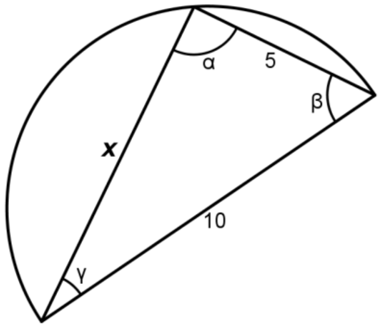
Vastaus: Pallojen yhteistilavuus on $\frac{2}{3}$ kotelon tilavuudesta.

b) $\text{A}_{\text{pallot}} = 4\cdot 4\pi r^2 = 16\pi r^2 \qquad \text{A}_{\text{vaippa}} = 2\pi r\cdot 8r = 16\pi r^2$

Vastaus: pallojen yhteispinta-ala ja kotelon vaipan pinta-ala ovat yhtäsuuret!

B-OSA

1. Määritä puoliympyrän sisällä olevan kolmion kulmien suuruudet sekä sivun *x* pituuden tarkka arvo.



Koska kyseessä on puoliympyrän sisältämä kehäkulma, on se suorakulma! Siten $\underline{\underline{\alpha = 90^\circ}}$
Sivu, jonka pituus on 10, on suorakulmaa vastassa, joten se on pisin sivu – hypotenuusa!

$\Rightarrow$ Pythagoraan lauseella:

$$x^2 + 5^2 = 10^2$$

$$\underline{\underline{x}} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \underline{\underline{\sqrt{75} = 5\sqrt{3}}}$$

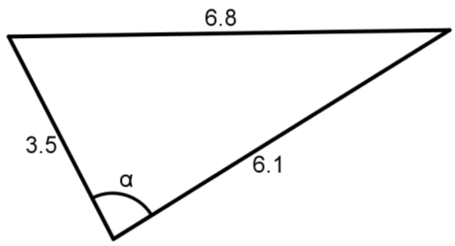
$$\cos\beta = \frac{5}{10} = 0,5 \,||\cos^{-1}$$

$$\underline{\underline{\beta = 60^\circ}}$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$$

$$\underline{\underline{\gamma = 30^\circ}}$$

2. **a)** Laske kolmion ala.



Lasketaan jokin kulma kosinilauseella:

$$6,8^2 = 3,5^2 + 6,1^2 - 2\cdot 3,5\cdot 6,1\cdot\cos\alpha$$

$$42,7\cos\alpha = 3,5^2 + 6,1^2 - 6,8^2$$

$$\cos\alpha = \frac{3,22}{42,7} \,||\cos^{-1}$$

$$\alpha = 85,6752..^\circ$$

Kolmion ala trigonometrisella kaavalla:

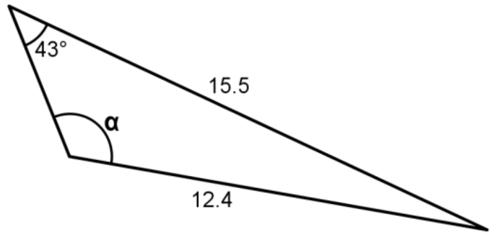
$$A = \frac{1}{2}\cdot 3,5\cdot 6,1\cdot\sin\alpha$$

$$= 10,6446..$$

$$\underline{\underline{\approx 10,7}}$$

Jatkuu… →

b) Laske kulman α suuruus.



Kulma α saadaan sinilauseella:

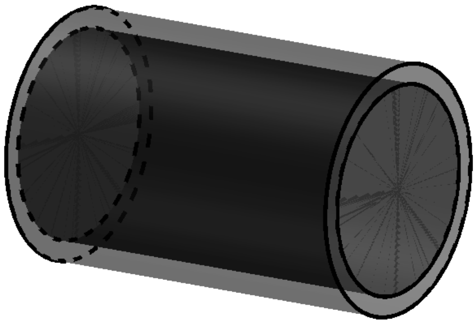
$$\frac{15,5}{\sin\alpha} = \frac{12,4}{\sin 43^\circ}$$

$$12,4\sin\alpha = 15,5\sin 43^\circ \; \|:12,4$$
$$\sin\alpha = 0,852497.. \; \| \sin^{-1}$$
$$(\alpha = 58,4844..^\circ) \quad \text{tai} \quad \alpha = 180^\circ - 58,4844..^\circ = 121,5155..^\circ$$
$$\text{(kulma on tylppä)} \qquad \underline{\underline{\alpha \approx 122^\circ}}$$

3. Ydinvoimalan ydinjätteen loppusijoituskapseli on kuparista valmistettu suora ympyrälieriö, jonka pituus on 4,754 m, ulkoläpimitta 1,052 m ja seinämän paksuus 5,0 cm.

a) Laske lieriön (ilman pohjia) massa, kun kuparin tiheys on $8,96\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.

b) Kapselin vaippa maalataan ulkopinnaltaan. Mikä on maalattava pinta-ala?



a) Vaipan ulkosäde on R = 1,052/2 = 0,526 m ja sisäsäde r = (1,052 – 0,10)/2 = 0,476 m.

Tilavuus on

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$
$$= \pi h(R^2 - r^2) = \pi\cdot 4,754\cdot(0,526^2 - 0,476^2)\ \text{m}^3 = 0,74825.. \approx 0,7483\ \text{m}^3$$

Vaipan massa on $m = \rho V = 8,96\cdot 10^3\cdot 0,7483\ \text{kg} = 6704,32077..\ \text{kg} \approx \underline{\underline{6,7\ \text{tonnia}}}$

b) Vaippa on suorakulmio, jonka korkeus on 4,754 m ja leveys $\pi\cdot d = 1,052\pi\ \text{(m)}$.
Maalattava ala on $1,052\pi\cdot 4,754 = 15,71175.. \approx \underline{\underline{15,7\ \text{m}^2}}$

4. Martti Maanviljelijä omistaa maita ja mantuja. Hän katselee maitaan kartasta, jonka mittakaava on 1 : 20 000.

a) Kuinka pitkä on kartalla tie, jonka pituus luonnossa on 380 m? Anna vastaus senttimetreinä.

b) Martin omistama metsäalue peittää kartalla 2,5 cm^2. Kuinka monta hehtaaria metsää Martti omistaa?

a) Merkitään pituutta kartalla *x*.

$$\frac{x}{380} = \frac{1}{20000}$$

$$20000x = 380 \;||: 20000$$

$$x = \frac{380}{20000} = 0{,}019\ (m) = \underline{\underline{1{,}9\ cm}}$$

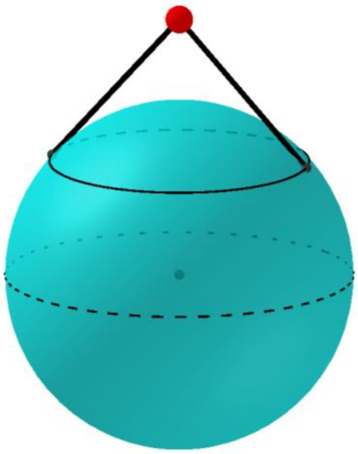
b) Merkitään kysyttyä pinta-alaa *A*:lla. Alojen suhde on mittakaavan neliö!

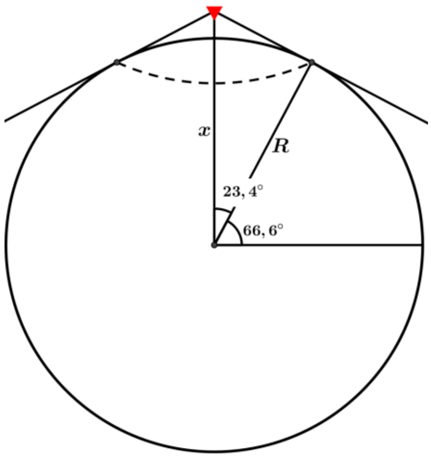
$$\frac{2{,}5}{A} = \left(\frac{1}{20000}\right)^2$$

$$\frac{2{,}5}{A} = \frac{1}{400000000}$$

$$A = 2{,}5 \cdot 400000000 = 1000000000\ cm^2 = \underline{\underline{10\ ha}}$$

5. Satelliitti on Pohjoisnavan yläpuolella ja sen näkyvyysalue ylettää juuri pohjoiselle napapiirille (leveyspiiri 66,6°). Kuinka korkealla satelliitti sijaitsee? Maapallon ympärysmitta on 40000 km.





Maapallon säde $\mathrm{R} = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366{,}1977\ (\mathrm{km})$.

$90^{\circ} - 66{,}6^{\circ} = 23{,}4^{\circ}$.

Mallikuvan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan:

$$\cos 23{,}4^{\circ} = \frac{\mathrm{R}}{x}$$

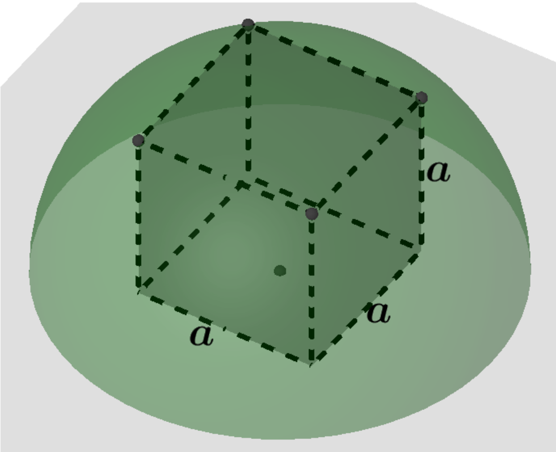
$$x = \frac{\mathrm{R}}{\cos 23{,}4^{\circ}} = \frac{6366{,}1977}{\cos 23{,}4^{\circ}} = 6936{,}7100..$$

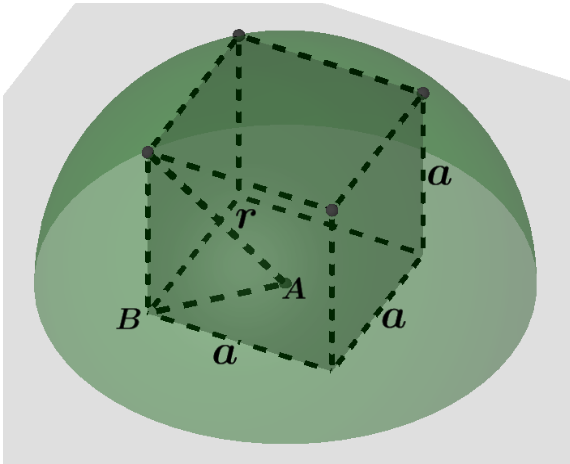
$$\begin{aligned} \text{Satelliitin korkeus} &= x - \mathrm{R} \\ &= 6936{,}7100 - 6366{,}1977 \\ &\approx \underline{\underline{570\ \mathrm{km}}} \end{aligned}$$

6. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla.

a) Ilmaise kuution ja puolipallon tilavuuksien tarkat arvot kuution särmän *a* avulla lausuttuna.

b) Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?





a) Olkoon kuution särmä *a* ja puolipallon säde *r*.

Jana AB on puolet pohjaneliön lävistäjästä $\Rightarrow$ $\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Kuvion suorakulmaisesta kolmiosta saadaan:

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + a^2$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

$$\mathrm{V}_{\text{kuutio}} = \underline{\underline{a^3}} \qquad \mathrm{V}_{\text{puolipallo}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a^3 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3}{2}}\pi a^3}}$$

b) $$\frac{\mathrm{V}_{\text{kuutio}}}{\mathrm{V}_{\text{puolipallo}}} = \frac{\cancel{a^3}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\pi\cancel{a^3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\pi} = 0{,}2598989\ldots \approx \underline{\underline{26\%}}\,.$$