MAA4 (Vektorit)
Kurssikoe, ratkaisut

A-OSA

Olkoon pisteet $\mathrm{A}=(-2,\ 4)$, $\mathrm{B}=(2,\ 1)$ ja $\mathrm{C}=(3,\ 2)$.

a) Muodosta vektorin $\overline{\mathrm{AB}}$ lauseke. **(1 p.)**

$$\overline{\mathrm{AB}}=(2-(-2))\bar{i}+(1-4)\bar{j}=\underline{\underline{4\bar{i}-3\bar{j}}}$$

b) Laske vektorin $\overline{\mathrm{AB}}$ pituus. **(1 p.)**

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\bar{i}-3\bar{j}$$
$$\left|\overline{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=\underline{\underline{5}}$$

c) Muodosta vektorin $\overline{\mathrm{AB}}^0$ lauseke. **(1 p.)**

$$\overline{\mathrm{AB}}^0=\frac{1}{\left|\overline{\mathrm{AB}}\right|}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{5}(4\bar{i}-3\bar{j})=\underline{\underline{\frac{4}{5}\bar{i}-\frac{3}{5}\bar{j}}}$$

d) Muodosta vektorin $\bar{c}$ lauseke, jonka pituus on 3 ja joka on vastakkaissuuntainen vektoriin $\overline{\mathrm{AB}}$ nähden. **(1 p.)**

$$\bar{c}=-3\overline{\mathrm{AB}}^0=-3\left(\frac{4}{5}\bar{i}-\frac{3}{5}\bar{j}\right)=\underline{\underline{-\frac{12}{5}\bar{i}+\frac{9}{5}\bar{j}}}$$

e) Jaa laskemalla vektori $\overline{\mathrm{AB}}$ vektorien $\bar{i}-\bar{j}$ ja $\bar{j}$ suuntaisiin komponentteihin. **(3 p.)**

$$\overline{\mathrm{AB}}=r(\bar{i}-\bar{j})+s\bar{j}$$
$$4\bar{i}-3\bar{j}=r(\bar{i}-\bar{j})+s\bar{j}$$
$$4\bar{i}-3\bar{j}=r\bar{i}-r\bar{j}+s\bar{j}$$
$$4\bar{i}-3\bar{j}=r\bar{i}+(s-r)\bar{j}$$

$$\begin{cases}4=r\\-3=s-r\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad s=-3+r=-3+4=1$$

Vastaus: $\overline{\mathrm{AB}}=4\bar{i}-3\bar{j}=\underline{\underline{4(\bar{i}-\bar{j})+\bar{j}}}$

f) Ovatko vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan? **(2 p.)**

$$\overline{AB} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$$
$$\overline{BC} = (3-2)\overline{i} + (2-1)\overline{j} = \overline{i} + \overline{j}.$$

Vektorit ovat kohtisuorassa, jos niiden pistetulo on nolla.

$$\overline{AB} \bullet \overline{BC} = 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ **eivät siis ole** kohtisuorassa toisiaan vastaan.

g) Lähdet kävelemään koordinaatiston pisteestä $D = (125, -34)$ ja etenet vektorit $-2\overline{AB}$, $\overline{OB}$ ja $-3\overline{OC}$, jolloin päädyt pisteeseen P. Mitkä ovat pisteen P koordinaatit? **(3 p.)**

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OD} - 2\overline{AB} + \overline{OB} - 3\overline{OC}\\ &= 125\overline{i} - 34\overline{j} - 2(4\overline{i} - 3\overline{j}) + 2\overline{i} + \overline{j} - 3(3\overline{i} + 2\overline{j})\\ &= 125\overline{i} - 34\overline{j} - 8\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{i} + \overline{j} - 9\overline{i} - 6\overline{j}\\ &= 110\overline{i} - 33\overline{j}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P = (110, -33)}}.$$

RATKAISUT **B-OSA**

1. Määritä vakio *r* siten, että vektorit $\overline{a} = (r-1)\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} + r\overline{j}$ ovat
a) vastakkaissuuntaiset **b)** yhtä pitkät.

a) Jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, niin on olemassa reaaliluku *t*, niin että $\overline{a} = t\overline{b}$.
Tällöin

$$(r-1)\overline{i} + 2\overline{j} = t(3\overline{i} + r\overline{j})$$
$$(r-1)\overline{i} + 2\overline{j} = 3t\overline{i} + rt\overline{j}$$

$$\begin{cases} r-1 = 3t & \Leftrightarrow r = 3t+1 \\ 2 = rt \end{cases}$$

$$2 = rt$$

$$2 = (3t+1)t \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 + t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} = \frac{-1\pm 5}{6}$$

$$t = -1 \quad \text{tai} \quad \left(t = \frac{2}{3}\right)$$

Koska vektorit ovat vastakkaissuuntaiset, niin on oltava $t < 0$.

$t = -1$, jolloin $r = 3t + 1 = 3\cdot(-1) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{r = -2}}$.

b) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä pitkät, jos

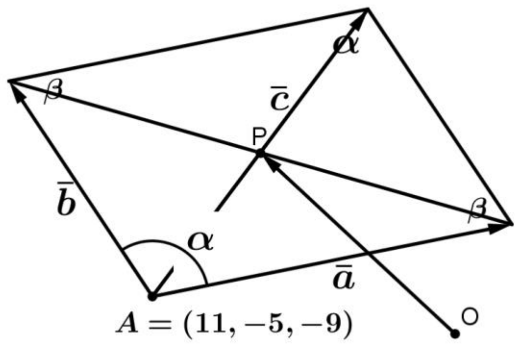
$$|\,\overline{a}\,| = |\,\overline{b}\,|$$
$$\sqrt{(r-1)^2 + 2^2} = \sqrt{3^2 + r^2} \quad ||\,()^2$$
$$(r-1)^2 + 2^2 = 3^2 + r^2$$
$$r^2 - 2r + 1 + 4 = 9 + r^2$$
$$-2r = 4$$
$$\underline{\underline{r = -2}}$$

2. Pisteestä $A=(11,-5,-9)$ lähtevät vektorit $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+7\overline{k}$ ja $\overline{b}=-\overline{i}+5\overline{j}-2\overline{k}$ ovat suunnikkaan sivuvektorit.

a) Määritä suunnikkaan lävistäjien leikkauspisteen P koordinaatit.

b) Laske suunnikkaan kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Mallikuva:



a) Pisteestä A lähtevä lävistäjävektori $\overline{c}$:

$$\begin{aligned}\overline{c} &= \overline{a}+\overline{b}\\ &= 2\overline{i}-\overline{j}+7\overline{k}+(-\overline{i}+5\overline{j}-2\overline{k})\\ &= \overline{i}+4\overline{j}+5\overline{k}\end{aligned}$$

Koska *suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa*, niin pisteen P paikkavektori on

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{c}\\ &= 11\overline{i}-5\overline{j}-9\overline{k}+\frac{1}{2}(\overline{i}+4\overline{j}+5\overline{k})\\ &= \frac{23}{2}\overline{i}-3\overline{j}-\frac{13}{2}\overline{k} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P=(\frac{23}{2},-3,-\frac{13}{2})}}\end{aligned}$$

b) Olkoon kulma $\alpha=\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})$.

$$\cos\alpha=\frac{\overline{a}\bullet\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}=\frac{2\cdot(-1)+(-1)\cdot 5+7\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+7^2}\sqrt{(-1)^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{-21}{\sqrt{54}\sqrt{30}} \quad \| \cos^{-1}$$

$$\alpha=121,44965...^\circ$$
$$\alpha\approx 121,4^\circ$$

Suunnikkaan kulmien summa on 360° ja vastinkulmat yhtä suuret, joten

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ-\alpha\\ &= 180^\circ-121,4^\circ\\ &= 58,6^\circ\end{aligned}$$

Vastaus: Suunnikkaan kulmat ovat $121,4^\circ$, $121,4^\circ$, $58,6^\circ$ ja $58,6^\circ$.

3. Suora kulkee pisteen A(1, 4, – 2) kautta ja sillä on suuntavektori $\overline{v} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$. Missä pisteessä suora lävistää *yz*–tason?

Merkitään kysytty piste P.

Muodostetaan suoran yhtälön parametriesitys:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 2t \\ z = -2 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

yz–tasossa *x*-koordinaatti on nolla, joten

$$0 = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$$
$$y = 4 - 2t = 6$$
$$z = -2 + t = -3$$

Vastaus: Suora lävistää *yz*-tason pisteessä $\underline{\underline{\mathrm{P} = (0,\ 6,\ -3)}}$.

4. Taso kulkee pisteen $(2,\ 4,\ 6)$ kautta ja se on kohtisuorassa vektoria $\overline{n} = \overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}$ vastaan.

a) Muodosta tason normaalimuotoinen yhtälö.

b) Missä pisteessä suora $\begin{cases} x = \quad 1 + t \\ y = \ 2 - 4t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ leikkaa tason?

a) Tason normaalimuotoinen yhtälö on

$ax + by + cz + d = 0$ || Sijoitetaan normaalivektorin kertoimet (a, b, c)

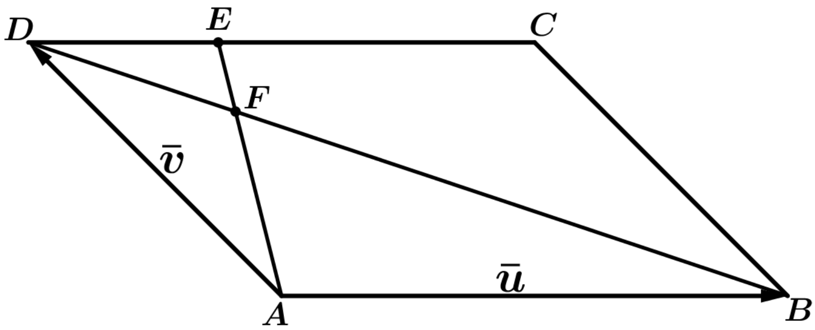
$$1 \cdot x + (-3) \cdot y + (-2) \cdot z + d = 0$$
$$x - 3y - 2z + d = 0 \quad \text{|| sijoitetaan piste } (2,\ 4,\ 6)$$
$$2 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + d = 0$$
$$d = 22 \qquad \Rightarrow \quad \text{Yhtälö on } \underline{\underline{x - 3y - 2z + 22 = 0}}$$

b) Leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat molemmat yhtälöt:

$$\begin{aligned} x-3y-2z+22&=0\\ (1+t)-3\cdot(2-4t)-2\cdot(-4+3t)+22&=0\\ 1+t-6+12t+8-6t+22&=0\\ 7t&=-25\\ t&=\frac{-25}{7} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on siten $\begin{cases} x = 1-\frac{25}{7} \\ y = 2-4(-\frac{25}{7}) \\ z=-4+3(-\frac{25}{7}) \end{cases} = \underline{\underline{\left(-\frac{18}{7}, \frac{114}{7}, -\frac{103}{7}\right)}}$

5. Suunnikkaassa *ABCD* sivuvektorit $\overline{AB}=\bar{u}$ ja $\overline{AD}=\bar{v}$. Piste *E* jakaa suunnikkaan sivun *CD* suhteessa 5 : 3. Missä suhteessa jana *AE* jakaa lävistäjän *DB*?



$\overline{DF}=s\overline{DB}=s(-\bar{v}+\bar{u})=-s\bar{v}+s\bar{u}=s\bar{u}-s\bar{v}$

toisaalta

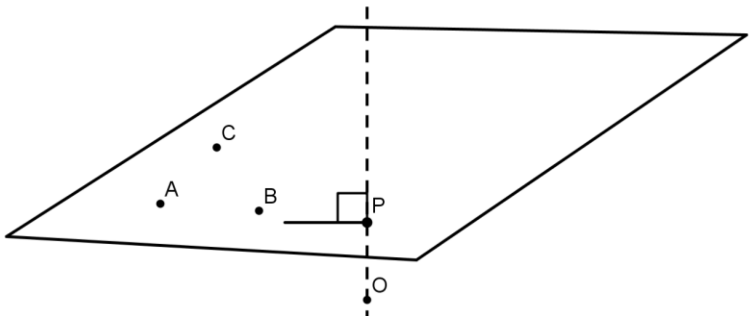
$$\begin{aligned}\overline{DF}&=\frac{3}{8}\bar{u}+t\overline{EA}\\ &=\frac{3}{8}\bar{u}+t(-\frac{3}{8}\bar{u}-\bar{v})\\ &=(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}t)\bar{u}-t\bar{v}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\overline{DF}=\overline{DF}$ $\begin{cases} s=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}t \\ -s=-t \quad \Rightarrow s=t \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$s=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}s$$
$$\frac{11}{8}s=\frac{3}{8}$$
$$s=\frac{3}{11}$$

Näin ollen lävistäjä DB jakautuu suhteessa DF : FB = <u>3 : 8</u>.

6. Pisteet A(1, 2, 3), B(2, 3, 4) ja C(5, -3, -2) ovat samassa tasossa. Laske origon etäisyys tästä tasosta. Anna vastaus tarkkana arvona ja yksidesimaalisena likiarvona.



Olkoon P se tason piste, joka on lähinnä origoa.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} &= \overline{\mathrm{OA}} + s\overline{u} + t\overline{v} \\ &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} + s\overline{\mathrm{AB}} + t\overline{\mathrm{AC}} \\ &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} + s(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) + t(4\overline{i} - 5\overline{j} - 5\overline{k}) \\ &= (1+s+4t)\overline{i} + (2+s-5t)\overline{j} + (3+s-5t)\overline{k}\end{aligned}$$

Vektori $\overline{\mathrm{OP}}$ on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan, joten:

$$\begin{cases}\overline{\mathrm{OP}} \bullet \overline{\mathrm{AB}} = 0 \\ \overline{\mathrm{OP}} \bullet \overline{\mathrm{AC}} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1+s+4t)\cdot 1 + (2+s-5t)\cdot 1 + (3+s-5t)\cdot 1 = 0 \\ (1+s+4t)\cdot 4 + (2+s-5t)\cdot(-5) + (3+s-5t)\cdot(-5) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3s - 6t + 6 = 0 \\ -6s + 66t - 21 = 0\end{cases}$$

$t = \frac{1}{6}$ ja $s = -\frac{5}{3}$ (esim. laskimella)

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} &= (1+s+4t)\overline{i} + (2+s-5t)\overline{j} + (3+s-5t)\overline{k} \\ &= 0\overline{i} - \frac{1}{2}\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k} \\ &= -\frac{1}{2}\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k} \quad \Rightarrow \quad \text{Piste P} = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Origon etäisyys tasosta on vektorin $\overline{\mathrm{OP}}$ pituus:

$$\left|\overline{\mathrm{OP}}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 0,707106... \approx \underline{\underline{0,7}}$$