

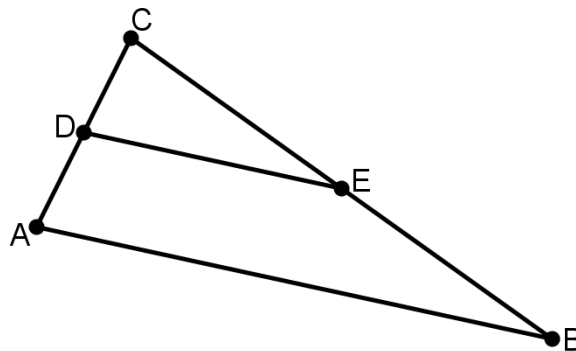
## MAA4 (Vektorit)

### Välitesti 5 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuoheen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Kuvassa on kolmio ABC. Pisteet D ja E ovat sivujen keskipisteitä. Osoita vektoreilla, että jana DE on yhdensuuntainen kolmion kannan AB kanssa ja pituudeltaan puolet siitä. (6 p.)



$$\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CB} \quad (2 \text{ p.})$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{CB}) \quad (1 \text{ p.})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AB} \quad (2 \text{ p.})$$

Vektori  $\overline{DE}$  on siis kannan  $\overline{AB}$  kanssa yhdensuuntainen ja pituudeltaan puolet siitä.

2. Laske pisteen  $P(1, 2, 3)$  etäisyys pisteiden  $A(6, -6, -4)$  ja  $B(-6, 2, -12)$  kautta kulkevasta suorasta. (6 p.)

Suoran suuntavektori  $\overline{AB} = (-6-6)\overline{i} + (2-(-6))\overline{j} + (-12-(-4))\overline{k} = -12\overline{i} + 8\overline{j} - 8\overline{k}$ .

Pisteen  $A$  kautta kulkevan vektorin  $\overline{AB}$  suuntaisen suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 6 - 12t \\ y = -6 + 8t \\ z = -4 - 8t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1 \text{ p.})$$

Olkoon pistettä  $P$  lähin suoran piste  $Q = (x, y, z) = (6 - 12t, -6 + 8t, -4 - 8t)$ .

$$\begin{aligned} \text{Vektori } \overline{PQ} &= (6 - 12t - 1)\overline{i} + (-6 + 8t - 2)\overline{j} + (-4 - 8t - 3)\overline{k} \\ &= (5 - 12t)\overline{i} + (-8 + 8t)\overline{j} + (-7 - 8t)\overline{k} \end{aligned} \quad (1 \text{ p.})$$

Vektorit  $\overline{AB}$  ja  $\overline{PQ}$  ovat kohtisuorassa:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{PQ} &= 0 \\ (-12\overline{i} + 8\overline{j} - 8\overline{k}) \cdot ((5 - 12t)\overline{i} + (-8 + 8t)\overline{j} + (-7 - 8t)\overline{k}) &= 0 \quad (1 \text{ p.}) \\ -12 \cdot (5 - 12t) + 8 \cdot (-8 + 8t) + (-8) \cdot (-7 - 8t) &= 0 \\ -60 + 144t - 64 + 64t + 56 + 64t &= 0 \\ -68 + 272t &= 0 \\ t &= \frac{1}{4} \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Piste } Q = (6 - 12 \cdot \frac{1}{4}, -6 + 8 \cdot \frac{1}{4}, -4 - 8 \cdot \frac{1}{4}) = (3, -4, -6).$$

$$\Rightarrow \text{Vektori } \overline{PQ} = (3 - 1)\overline{i} + (-4 - 2)\overline{j} + (-6 - 3)\overline{k} = 2\overline{i} - 6\overline{j} - 9\overline{k} \quad (1 \text{ p.})$$

$$\Rightarrow \text{Etäisyys } |\overline{PQ}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-9)^2} = \sqrt{121} = \underline{\underline{11}}. \quad (1 \text{ p.})$$

Vastaus: Pisteen  $P$  etäisyys suorasta on 11.