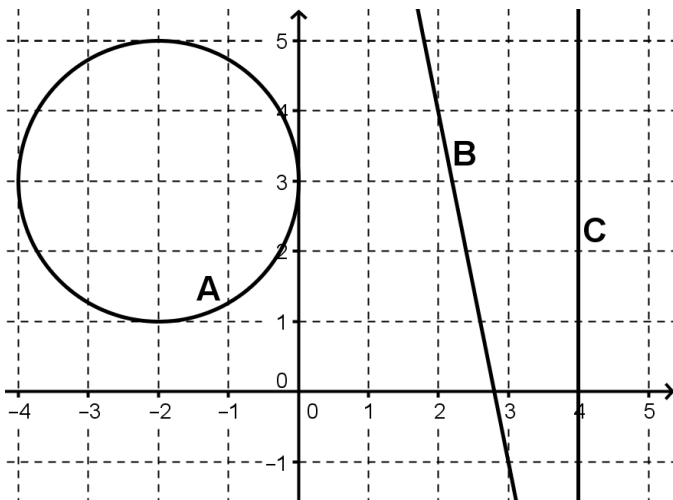


# MAA5-Harjoituskoe

## RATKAISUT

### A-OSA

1. Ilmoita kuvan pistejoukkojen A – C yhtälöt. (3 p.)



A:  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

B:  $y = -5x + 14$

C:  $x = 4$

2. Mitkä ovat ympyrän  $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4 = 0$  keskipiste ja säde? (3 p.)

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 4 = 0 \quad || : 2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x \quad + y^2 = 2$$

$$x^2 + 2x + \underline{1^2} + y^2 = 2 + 1^2$$

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{kp} = (-1, 0) \text{ ja } r = \sqrt{3}}}$$

3. Ratkaise epäyhtälö  $|3x-7| > 5$ . (2 p.)

$$|3x-7| > 5$$

$$3x-7 < -5 \quad \text{tai} \quad 3x-7 > 5$$

$$3x < 2 \quad \quad \quad 3x > 12 \quad || : 3$$

$$\underline{\underline{x < \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x > 4}}$$

4. Ympyrällä  $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 5$  on tangentti, joka kulkee pisteen  $(-2,1)$  kautta. Mikä on tangentin yhtälö? (4 p.)

Ympyrän keskipiste on  $(-3,3)$ .

Piste  $(-2,1)$  on ympyrällä, sillä se toteuttaa ympyrän yhtälön:

$$(-2+3)^2 + (1-3)^2 = 5$$

$$1^2 + (-2)^2 = 5$$

$$5 = 5 \text{ tosi!}$$

$$\text{Säteen kulmakerroin: } k_s = \frac{3-1}{-3-(-2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

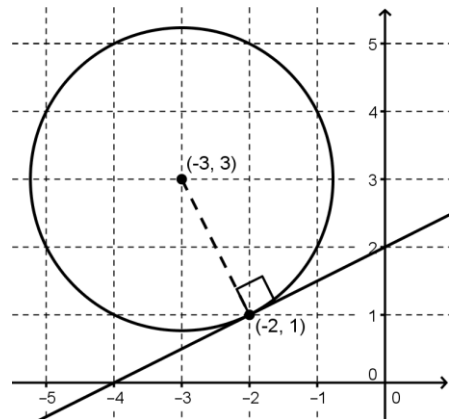
Säde ja tangentti ovat kohtisuorassa  $\Rightarrow$  Tangentin kulmakerroin  $k_t = \frac{1}{2}$ .

Tangentin yhtälö:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + 2}}$$



## B-OSA

1. Olkoot pisteet  $A = (46, 23)$  ja  $B = (-32, 125)$ .

a) Mikä on pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin? (1 p.)

b) Mikä on pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkevan suoran yhtälö? (1 p.)

c) Mikä on janan  $AB$  keskipiste? (1 p.)

d) Mikä on janan  $AB$  pituus yhden desimaalin tarkkuudella? (1 p.)

e) Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka halkaisija jana  $AB$  on? (2 p.)

a)

$$k = \frac{125 - 23}{-32 - 46} = \frac{102}{-78} = -\frac{17}{13}$$

b)

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 23 = -\frac{17}{13}(x - 46)$$

$$y = -\frac{17}{13}x + \frac{1081}{13}$$

$$c) KP = \left( \frac{46 - 32}{2}, \frac{23 + 125}{2} \right) = (7, 74)$$

$$d) d = \sqrt{(-32 - 46)^2 + (125 - 23)^2} = \sqrt{6084 + 10404} = \sqrt{16488} = 128,4056... \approx \underline{\underline{128,4}}$$

e) Säde  $r = \frac{\sqrt{16488}}{2}$ . Keskipiste  $(7, 74)$ . Ympyrän yhtälö on

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 7)^2 + (y - 74)^2 = \left( \frac{\sqrt{16488}}{2} \right)^2$$

$$\underline{\underline{(x - 7)^2 + (y - 74)^2 = 4122}}$$

2. Määritä sen janan pituus, jonka paraabeli  $x = y^2 - 2y - 5$  erottaa suorasta  $y = x + 1$ . Anna vastauksena tarkka-arvo.

Merkitään kysyttyä janan pituutta  $= d$ .

$$y = y$$

$$x = (x + 1)^2 - 2(x + 1) - 5$$

$$x = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 - 5$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \text{ tai } x = -2$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4, \quad x = -2 \Rightarrow y = -1$$

Leikkauspisteet ovat  $(3, 4)$  ja  $(-2, -1)$ .

$$d = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}$$

3. Määritä, mistä  $x$ -akselin pisteistä suoralle  $y = 2x - 5$  oleva etäisyys on täsmälleen  $3\sqrt{5}$ ?

Merkitään kysyttyä pistettä  $(x, 0)$ .

$$y = 2x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 5 = 0$$

$$\frac{|2 \cdot x + (-1) \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{|2x - 5|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \quad || \cdot \sqrt{5}$$

$$|2x - 5| = 15$$

$$2x - 5 = -15 \quad \text{tai} \quad 2x - 5 = 15$$

$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

**Vastaus:** Pisteistä  $(-5, 0)$  ja  $(10, 0)$

4. Paraabeli  $y = ax^2 + bx + c$  kulkee pisteiden  $(2, 3)$ ,  $(3, 2)$  ja  $(4, -1)$  kautta. Määritä luvut  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

Sijoitetaan pisteet paraabelin yhtälöön:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ -1 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = 4a + 2b + c \\ 2 = 9a + 3b + c \\ -1 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä laskimella. **Vastaus:**  $a = -1$ ,  $b = 4$  ja  $c = -1$ .

5. Määritä sellaisen pistejoukon yhtälö, jonka jokaisen pisteen etäisyys pisteestä  $(0, 2)$  on kaksinkertainen verrattuna etäisyyteen origosta. Mikä pistejoukko on kyseessä?

Olkoon  $(x, y)$  kysytyn pistejoukon mielivaltainen piste.

$$\sqrt{(0-x)^2 + (2-y)^2} = 2\sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (2-y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad || (\ )^2 \text{ molemmat puolet positiiviset!}$$

$$x^2 + (2-y)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + 4 - 4y + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4y = 4 \quad ||: 3$$

$$x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$\Rightarrow$  kyseessä on ympyrä, jonka keskipiste on  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$  ja säde  $r = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$