MAA6 (Derivaatta)
Välitesti 5 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata! Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Muodosta funktiolle $f(x)=\frac{1}{x^4}+x$ kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin yhtälö. **(3 p.)**

$$f(x)=\frac{1}{x^4}+x=x^{-4}+x$$

$$f'(x)=-4x^{-5}+1$$

$$x_0=1 \quad\Rightarrow\quad y_0=f(1)=\frac{1}{1^4}+1=2. \qquad \text{(1 p.)}$$

$$k=f'(1)=-4\cdot 1^{-5}+1=-3. \qquad \text{(1 p.)}$$

Tangentin yhtälö:

$$\begin{aligned} y-y_0 &= k(x-x_0) \\ y-2 &= -3(x-1) \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{=-3x+5}} \qquad \text{(1 p.)} \end{aligned}$$

2. Funktio $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x}{x^2-x}$. Muodosta funktion kulkukaavio ja selvitä, missä funktio on vähenevä ja missä kasvava? **(4 p.)**

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x}{x^2-x}$$

Määrittely: $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0$ tai $x=1 \quad \Rightarrow \quad x\neq 0$ ja $x\neq 1$ (1 p.)

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+1)(x^2-x)-(x^3-x^2+x)(2x-1)}{(x^2-x)^2}$$

$$=\frac{3x^4-3x^3-2x^3+2x^2+x^2-x-(2x^4-x^3-2x^3+x^2+2x^2-x)}{(x^2-x)^2}$$

$$=\frac{x^4-2x^3}{(x^2-x)^2},\quad x\neq 0 \text{ ja } x\neq 1$$

Derivaatan nollakohdat:

$f'(x)=0$

$x^4-2x^3=0$

$x^2(x^2-2x)=0 \;||\; \text{tns.}$

$x^2=0$ tai $x^2-2x=0$

$(x=0)$ tai $x(x-2)=0 \;||\; \text{tns.}$

$(x=0)$ tai $x=2$

$f'(-1)=0,75>0$

$f'(0,5)=-3<0$

$f'(1,5)=-3<0$

$f'(3)=0,75>0$

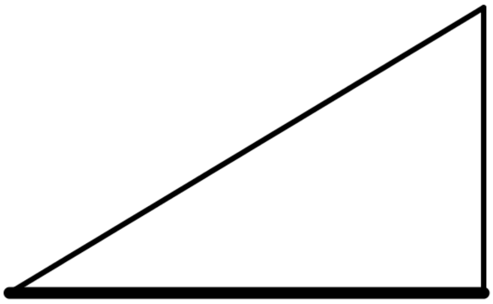
		0		1		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(1 p.)

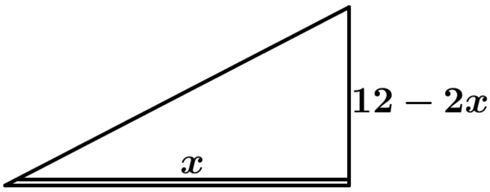
Vastaus. Funktio on $\underline{\underline{\text{vähenevä, kun } 0<x<1 \text{ tai } 1<x\leq 2.}}$ (1 p.)

Funktio on $\underline{\underline{\text{kasvava, kun } x<0 \text{ tai } x\geq 2.}}$ (1 p.)

3. Suorakulmaisen kolmion kanta ja korkeus taitellaan rautalangasta, jonka pituus on 12 cm. Kanta taitellaan kaksinkertaiseksi. Kuinka pitkäksi valitaan kolmion kanta ja korkeus, kun halutaan, että kolmion pinta-ala olisi mahdollisimman iso. **(5 p.)**

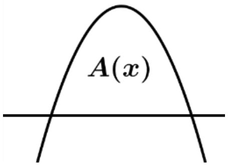


Merkitään kolmion *kanta* $= x$ ja *korkeus* $= 12 - 2x$. (1 p.)



Pinta-alafunktio: $A(x) = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{x \cdot (12-2x)}{2} = \frac{-2x^2 + 12x}{2} = -x^2 + 6x$ (2 p.)

Alaspäin aukeava paraabeli, joten suurin arvo alalle löytyy paraabelin huipusta:
(tai perustelu kulkukaaviolla!)



$A'(x) = -2x + 6$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2x + 6 &= 0 \\ -2x &= -6 \quad \|:(-2) \\ x &= 3 \end{aligned}$$ (1 p.)

Ala on siis suurin, kun kannaksi *x* valitaan $x = 3$ (cm).
Korkeus on siten $12 - 2x = 12 - 2 \cdot 3 = 6$ (cm).

Vastaus: Ala on suurin, kun kanta on 3 cm ja korkeus 6 cm. (1 p.)