MAA7-Harjoituskoe

RATKAISUT

A-OSA

1. Laske funktion $f(x)=\cos(3x)$ derivaatta kohdassa $x=\frac{\pi}{2}$. **(2 p.)**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(3x) \\
f'(x) &= -\sin(3x)\cdot \mathrm{D}(3x) = -3\sin(3x) \\
f'(\tfrac{\pi}{2}) &= -3\sin(3\cdot\tfrac{\pi}{2}) \\
&= -3\cdot\sin\frac{3\pi}{2} \\
&= -3\cdot(-1) \\
&= \underline{\underline{3}}
\end{aligned}$$

2. $h(x)=\sin(2x)$ ja $v(x)=2x+3$. Muodosta yhdistetyn funktion $(v\circ h)(x)$ lauseke ja laske $(v\circ h)(\frac{\pi}{4})$. **(4 p.)**

$$\begin{aligned}
(v\circ h)(x) &= v(h(x)) \\
&= \underline{\underline{2\sin(2x)+3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v\circ h)(\tfrac{\pi}{4}) &= 2\sin(2\cdot\tfrac{\pi}{4})+3 \\
&= 2\sin(\tfrac{\pi}{2})+3 \\
&= 2\cdot 1+3 \\
&= \underline{\underline{5}}
\end{aligned}$$

3. Ratkaise yhtälö $2\sin(4x)=1$. **(4 p.)**

$$2\sin(4x)=1$$

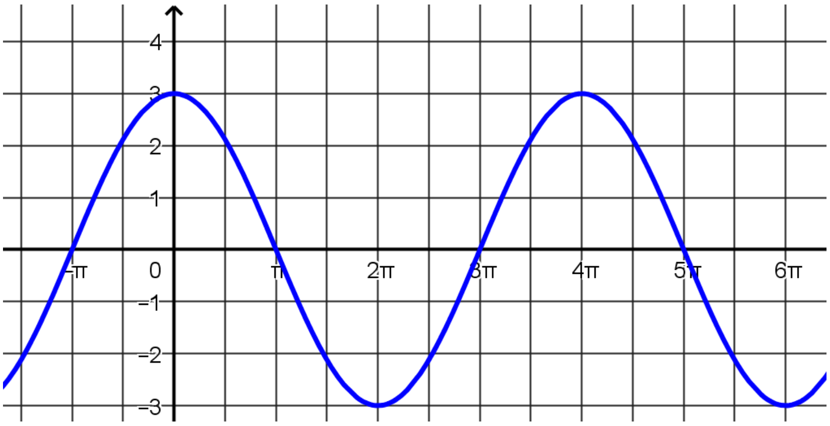
$$\sin(4x)=\frac{1}{2}$$

$$4x=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 4x=\pi-\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{24}+n\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{tai} \quad 4x=\frac{5\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

$$\underline{\underline{x=\frac{\pi}{24}+n\cdot\frac{\pi}{2}}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x=\frac{5\pi}{24}+n\cdot\frac{\pi}{2}}}$$

4. Mikä on kuvan trigonometrisen funktion $f(x)$ lauseke? **(2 p.)**



$$f(x) = \underline{\underline{3\cos(\frac{1}{2}x)}}$$

B-OSA

1. **a)** Kuinka monta astetta on 2 radiaania? Anna tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

b) Kuinka monta radiaania on 2 astetta? Anna tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

c) Ympyrän säde on 12 ja keskuskulmaa α vastaavan kaaren pituus on 4. Kuinka monta radiaania keskuskulma on? Anna vastauksena tarkka arvo.

a)

$$\pi \text{ (rad)} = 180^\circ \;\|: \pi$$

$$1 \text{ (rad)} = \frac{180^\circ}{\pi} \;\| \cdot 2$$

$$2 \text{ (rad)} = \underline{\underline{\frac{360^\circ}{\pi}}}$$

$$= 114{,}5915...^\circ$$

$$\approx \underline{\underline{114{,}59^\circ}}$$

b)

$$180^\circ = \pi \text{ (rad)} \;\|: 180$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} \;\| \cdot 2$$

$$2^\circ = \frac{2\pi}{180} \text{ (rad)}$$

$$2^\circ = \underline{\underline{\frac{\pi}{90} \text{ (rad)}}}$$

$$= 0{,}0349...$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}03}}$$

c)

$$\alpha = \frac{4}{12}$$

$$\alpha = \underline{\underline{\frac{1}{3} \text{ (rad)}}}$$

2. Laske tarkat arvot $\sin x$, $\tan x$ ja $\sin 2x$, kun $\cos x = -\frac{4}{5}$ ja tiedetään, että $\tan x > 0$.

Koska $\cos x < 0$ ja $\tan x > 0$, niin kulman x loppukylki sijaitsee 3. neljänneksessä!

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \qquad \text{3. neljännes} \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\sin x = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{\sin x = -\frac{3}{5}}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = -\frac{3}{5} : (-\frac{4}{5})$$

$$\underline{\underline{\tan x = \frac{3}{4}}}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\sin 2x = 2\cdot(-\frac{3}{5})\cdot(-\frac{4}{5})$$

$$\underline{\underline{\sin 2x = \frac{24}{25}}}$$

3. Veden syvyys satamassa vaihtelee vuoroveden vaikutuksesta. Veden syvyyden metreinä ilmaisee likimain funktio

$$h(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-5)\right) + 8,$$

missä t on keskiyöstä kulunut aika tunteina.

a) Millä nopeudella vedenpinta nousee tai laskee kello 13.00?

b) Kuinka syvää satama-altaassa on kello 13.00?

a)

$$h(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-5)\right) + 8$$

$$h'(t) = \frac{-2\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)}{3}$$

$$h'(13) = -\frac{\pi}{3}$$

$$= -1{,}0471...$$

$$\approx \underline{\underline{-1{,}05\ (m/h)}}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Klo 13.00 vesi laskee nopeudella 1,05 m/h.}}}$

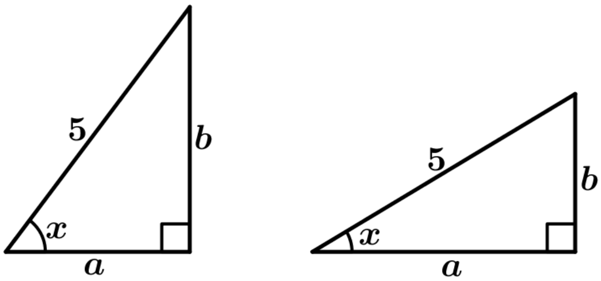
b)

$$h(t)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-5)\right)+8$$

$$\begin{aligned}h(13)&=4\sin\left(\frac{\pi}{6}(13-5)\right)+8\\&=8-2\sqrt{3}\\&=4,53589...\\&\approx \underline{\underline{4,5\text{ (m)}}}\end{aligned}$$

Vastaus: <u>Klo 13.00 veden syvyys on 4,5 m.</u>

4. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 5. Kun kantakulmaa x muuttaa, niin muuttuvat myös kolmion kanta a ja korkeus b ja siten myös pinta-ala. Määritä kantakulma x radiaaneina siten, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri. Mikä on tämä suurin mahdollinen pinta-ala?



Ilmaistaan kanta ja korkeus kulman x avulla:

$$\cos x=\frac{a}{5}\qquad\qquad \sin x=\frac{b}{5}$$

$$a=5\cos x\qquad\qquad b=5\sin x\qquad\qquad x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$$

Kolmion pinta-alafunktio:

$$A(x)=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{5\cos x\cdot 5\sin x}{2}=12,5\sin x\cos x$$

$$A'(x)=25\cos^2 x-12,5\quad \text{(laskin)}$$

$$A'(x)=0$$

$$25\cos^2 x-12,5=0$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\quad \text{tai}\quad x=\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\quad \text{tai}\quad x=-\frac{3\pi}{4}+n\cdot 2\pi\quad \text{tai}\quad x=\frac{3\pi}{4}+n\cdot 2\pi\quad \text{(laskin)}$$

Välille $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ derivaatan nollakohdista kuuluu vain $x=\frac{\pi}{4}$.

Pinta-alafunktio $A(x)$ on jatkuva ja saa siten suurimman arvonsa välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa:

$$A(0) = 12{,}5 \sin 0 \cos 0 = 0$$

$$A(\frac{\pi}{2}) = 12{,}5 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$A(\frac{\pi}{4}) = 12{,}5 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 12{,}5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{6{,}25}} \quad \text{(suurin arvo)}$$

Vastaus: Kolmion ala on suurin, kun kantakulma $x = \frac{\pi}{4}$. Ala on tällöin 6,25 pinta-alayksikköä.

5. Trigonometrinen funktio $\tan x$ määritellään $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, missä $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että tangenttifunktion derivaattafunktio on $\frac{1}{\cos^2 x}$.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \quad \leftarrow = 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}} \end{aligned}$$