

MAA7 (Trigonometriset funktiot)

Välitesti 5 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuoheen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata! Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Derivoi ilman laskinta

a) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ (1 p.)

b) $g(x) = \sin^4 x$ (1 p.)

c) $h(x) = \tan(x^2)$ (1 p.)

a)

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot D\left(\frac{1}{3}x\right) \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)}} \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

b)

$$g(x) = \sin^4 x = (\sin x)^4$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4 \cdot (\sin x)^3 \cdot D(\sin x) \\ &= \underline{\underline{4\sin^3 x \cos x}} \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

c)

$$h(x) = \tan(x^2)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x^2)} \cdot D(x^2) \\ &= \underline{\underline{\frac{2x}{\cos^2(x^2)}}} \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

2. Laadi funktiolle $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ kulkukaavio välille $[0, 2\pi]$. (5 p.)

$$f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$$

$$f'(x) = -\sqrt{3} \sin x + \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x \quad (1 \text{ p.})$$

$$f'(x) = 0$$

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\cos x = \sqrt{3} \sin x \quad || : \cos x$$

$$1 = \sqrt{3} \tan x \quad || : \sqrt{3}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1 \text{ p.})$$

Välille $[0, 2\pi]$ kuuluvat derivaatan nollakohdat:

$$\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{6} \quad (\approx 0,52)$$


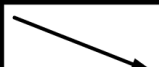

$$\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6} \quad (\approx 3,7) \quad (1 \text{ p.})$$

Kulkukaavio välillä $[0, 2\pi]$:

$$f'(0,1) = \cos 0,1 - \sqrt{3} \sin 0,1 \approx 0,82 > 0$$

$$f'(1) = \cos 1 - \sqrt{3} \sin 1 \approx -0,92 < 0$$

$$f'(4) = \cos 4 - \sqrt{3} \sin 4 \approx 0,66 > 0$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	2π
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

(Kulkukaavio 2 p.)

3. Laske funktion $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ välillä $[0, 2\pi]$ olevat derivaatan nollakohdat. Piirrä myös funktion kuvaaja GeoGebralla. (4 p.)

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + \sin x$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos x = -1$$

$$\sin x = 0 \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = n \cdot \pi \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad (1 \text{ p.})$$

Derivaatan nollakohtista välille $[0, 2\pi]$ kuuluvat:

$$x = 0 \cdot \pi = \underline{\underline{0}}$$

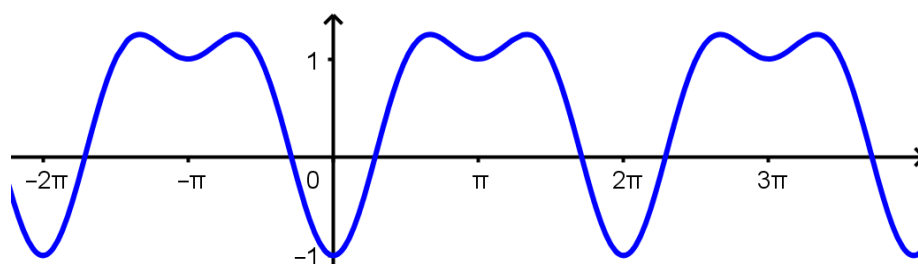
$$x = 1 \cdot \pi = \underline{\underline{\pi}}$$

$$x = 2 \cdot \pi = \underline{\underline{2\pi}}$$

(2 p., jokainen puuttuva -1 p.)

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$



(Kuva 1 p.)