

# Ratkaisut

## MAA7 – VÄLITESTI 4

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisumonisteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Jos sait vähintään 9/12 pistettä, olet valmis siirtymään seuraavaan osioon! Kertaa tarvittaessa.

1. Suorakulmion kaksi kärkeä ovat  $x$ -akselilla ja toiset kaksi funktion  $f(x) = -x^2 + 4$  kuvaajalla  $x$ -akselin yläpuolella. Tutki tilannetta [tämän sovelluksen](#) avulla ja ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

**Ratkaisu:** Sovellusta tutkimalla suurin mahdollinen pinta-ala on 6,16 (4p.)

2. Suorakulmion kaksi kärkeä ovat  $x$ -akselilla ja toiset kaksi funktion  $f(x) = -x^2 + 4$  kuvaajalla  $x$ -akselin yläpuolella. Mikä on suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala (tarkka vastaus ja perustelu esimerkiksi kulkukaavion avulla)?

*Vihje:* Muodosta tutkittavan funktion lauseke laskemalla suorakulmion pinta-ala kohdassa  $x$ . Tällöin suorakulmion leveys on  $2x$ . Mikä on suorakulmion korkeus? Kannattaa tutkia vielä [sovellusta](#).

**Ratkaisu:** Suorakulmion leveys on  $2x$  ja korkeus  $-x^2 + 4$ . Saadaan pinta-alafunktio:

$$A(x) = 2x(-x^2 + 4) = -2x^3 + 8x \quad (2p.)$$

Ratkaistaan pinta-alan suurin arvo välillä  $[0,2]$  (funktio on symmetrinen  $y$ -akselin suhteen ja se saa positiivisia arvoja välillä  $[-2,2]$ ):

$$\text{Derivoidaan: } A'(x) = -6x^2 + 8$$

$$\text{Ratkaistaan derivaatan nollakohdat: } -6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Suljetulla välillä jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä, tai derivaatan nollakohdassa.

Lasketaan vaihtoehdot:

$$A(0) = -2 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0 = 0$$

$$A(2) = -2 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 = 0$$

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

**Vastaus:** Suurin mahdollinen pinta-ala on  $\frac{32}{3\sqrt{3}}$  (vaihtoehtoisesti perustelu kulkukaavion avulla) (4p.)

3. a) Derivoi funktio  $g(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$

**Ratkaisu:**

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{D(2x-3) \cdot (3x+1) - D(3x+1) \cdot (2x-3)}{(3x+1)^2} \\&= \frac{2 \cdot (3x+1) - 3 \cdot (2x-3)}{(3x+1)^2} \\&= \frac{6x+2-6x+9}{(3x+1)^2} \\&= \frac{11}{(3x+1)^2}\end{aligned}$$

**Vastaus:**  $g'(x) = \frac{11}{(3x+1)^2}$  (2p.)

b) Ratkaise derivaatan nollakohdat  $f(x) = 3x^2(2x-4)^2$

**Ratkaisu:**

$$\begin{aligned}f'(x) &= D(3x^2) \cdot (2x-4)^2 + 3x^2 \cdot D(2x-4)^2 \\&= 6x \cdot (2x-4)^2 + 3x^2 \cdot 2(2x-4) \cdot 2 \\&= 6x \cdot ((2x-4)^2 + 2x(2x-4)) \\&= 6x(4x^2 - 16x + 16 + 4x^2 - 8x) \\&= 6x(8x^2 - 24x + 16)\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat:

$$6x(8x^2 - 24x + 16) = 0$$

$$6x = 0 \text{ tai } 8x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = 2$$

**Vastaus:** Derivaatan nollakohtia ovat  $x=0$ ,  $x=1$  ja  $x=2$  (2p.)