Ratkaisut

MAA7 – VÄLITESTI 5

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisumonisteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Jos sait vähintään 9/12 pistettä, olet valmis siirtymään seuraavaan osioon! Kertaa tarvittaessa.

1. Muodosta tämän funktion f välille [-8,10] rajattu kulkukaavio. Mitkä ovat funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot? (2p.)

Ratkaisu:

Sovelluksen perusteella:

	-8 … -1	-1 … 2	2 … 3	3 … 10
$f\,'(x)$	+	–	–	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Ääriarvokohtia ovat $x=-1$ ja $x=3$. Ääriarvoja ovat lokaali maksimi $f(-1)=0,2$ ja lokaali minimi $f(3)=6$. **(2p.)**

2. Muodosta funktion $f(x)=x+\dfrac{4}{x-1}$ välille [-8, 10] rajattu kulkukaavio. Mitkä ovat funktion ääriarvot? (4p.)

Ratkaisu:

Funktio on määritelty, kun $x\neq 1$. Funktiolla f on kohdassa 1 pystysuora asymptootti. Tämä huomioidaan myös kulkukaaviossa.

Derivoidaan: $f\,'(x)=1+\dfrac{0\cdot(x-1)-4\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ **(+1p.)**

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0$$

$$x^2-2x-3=0$$ **(+1p.)**

toisen asteen yhtälön ratkaisukaava /laskin /tekijöihinjako:

$x=-1$ tai $x=3$

	-8 … -1	-1 … 1	1 … 3	3 … 10
$f'(x)$	+	–	–	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

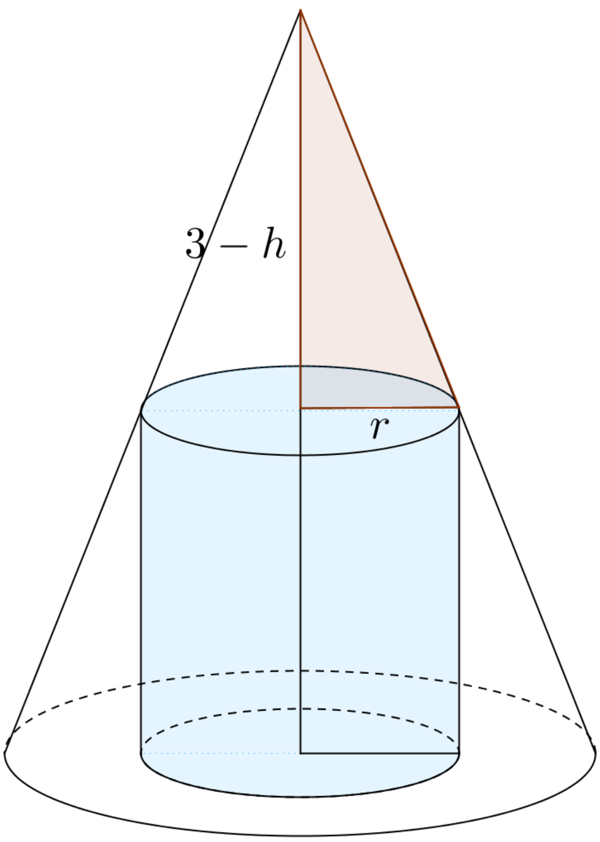
Ääriarvoja ovat lokaali maksimi $f(-1) = -1 + \dfrac{4}{-1-1} = -1 - 2 = -3$ ja lokaali minimi $f(3) = 3 + \dfrac{4}{3-1} = 5$. **(+2p.)**

3. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 1 ja korkeus 3. Kartion sisäpuolella on lieriö, jonka pohja yhtyy kartion pohjaan. Mikä on tällaisen lieriön suurin mahdollinen tilavuus? Mitkä ovat suurimman mahdollisen lieriön pohjan säde ja korkeus? Ratkaise tehtävä tämän sovelluksen avulla. (2p.)

Ratkaisu:
Sovelluksen perusteella suurin mahdollinen tilavuus vaikuttaisi olevan 1,4. Tällöin lieriön korkeus on 1 ja säde 0,67.

4. Ratkaise edellinen tehtävä algebrallisesti. (4p.)

Vihje: Muodosta funktio, joka kuvaa lieriön tilavuutta. Löydät yhteyden lieriön säteen ja korkeuden välille yhdenmuotoisten kolmioiden avulla (ks. mallikuva).



Ratkaisu:

Maksimoidaan lieriön tilavuutta: $V(r)=\pi r^2 h$

Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla (ks. kuva) saadaan

$$\frac{3-h}{r}=\frac{3}{1}$$
$$3-h=3r$$
$$h=3-3r$$

Joten maksimoitava funktio on: $V(r)=\pi r^2(3-3r)=3\pi r^2-3\pi r^3$ (Funktio on määritelty, kun $r\in[0,1]$ ja se on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva koko määrittelyjoukossaan).

Derivoidaan: $V'(r)=6\pi r-9\pi r^2$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$6\pi r-9\pi r^2=0$$
$$3\pi r(2-3r)=0$$
$$r=0 \text{ tai } 2-3r=0$$
$$r=\frac{2}{3}$$

Suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä, tai derivaatan nollakohdassa:

$V(0)=0$

$V(\frac{2}{3})=3\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\pi\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4\pi}{3}-\frac{8\pi}{9}=\frac{4\pi}{9}\approx 1,4$

$V(1)=0$

Vastaus: suurin mahdollinen tilavuus on $\frac{4\pi}{9}$. Tällöin lieriön korkeus on 1 ja säde $\frac{2}{3}$ **(4p.)**