

MAA8 (Juuri- ja logaritmifunktiot)

Välitesti 5 - ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. a) Tee kulkukaavio funktiolle $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ (4 p.)

b) Määritä funktion ääriarvot. (2 p.)

a)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (1 \text{ p.})$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1 \parallel e^{(\cdot)}$$

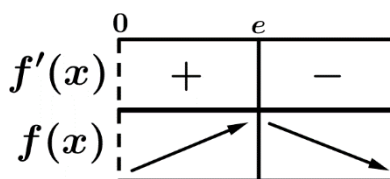
$$x = e^1$$

$$x = e \quad (\approx 2,718...) \quad (1 \text{ p.})$$

Kulkukaavio:

$$f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 > 0$$

$$f'(3) = \dots \approx -0,01 < 0$$



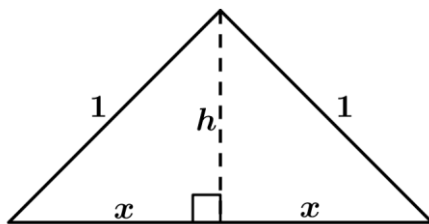
(2 p.)

b) Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla on maksimikohta $x = e$. (1 p.)

Maksimiarvo on $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \quad (\approx 0,37)$ (1 p.)

2. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 1. Määritä kolmion kannan pituus niin, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri. Mikä on tämän suurimman alan tarkka arvo? (6 p.)

Merkitään kannan puolikasta x :llä.



$$x^2 + h^2 = 1^2$$

$$h = \sqrt{1-x^2} \quad (1 \text{ p.})$$

$$\text{Pinta-alafunktio } A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = x\sqrt{1-x^2} = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1 \text{ p.})$$

$$\text{Määrittely: } 0 < x < 1.$$

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1 \text{ p.})$$

$$A'(x) = 0$$

$$1-2x^2 = 0$$

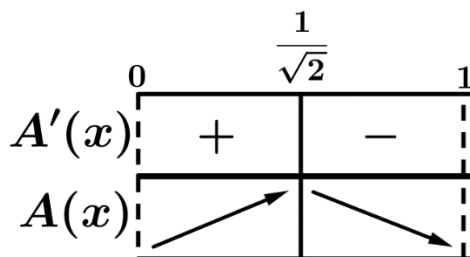
$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ tai } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\approx 0,71)$$

Kulkukaavio:

$$A'(0,5) = 0,5773... > 0$$

$$A'(0,9) = -1,4223... < 0$$



(1 p.)

$$\text{Pinta-ala on suurin, kun } x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Kolmion kanta on tällöin } 2x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}. \quad (1 \text{ p.})$$

Kolmion suurin pinta-ala on

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (pinta-alayksikköä)} \quad (1 \text{ p.})$$