

MAA9 (Trigonometriset funktiot ja lukujonot)

Välitesti 5 – ratkaisut ja pisteytysohje

Tarkista ja pisteytä tehtäväpaperiin tai vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisumonisteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Jos sait vähintään 9/12 pistettä, olet valmis siirtymään seuraavaan osioon!

1. Luettele lukujonon a_n neljä ensimmäistä lukua, kun
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 7 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases} \quad (4 \text{ p.})$$

$$a_1 = \underline{4}$$

$$a_2 = \underline{7}$$

$$a_3 = 2a_{3-1} - a_{3-2} = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 7 - 4 = \underline{10} \quad (2 \text{ p.})$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 10 - 7 = \underline{13} \quad (2 \text{ p.})$$

2. Laske ilman laskinta $\sum_{n=1}^{100} (2n+1)$. (4 p.)

$$\sum_{n=1}^{100} (2n+1) = (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1) + \dots + (2 \cdot 100 + 1) \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 201 \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 100 \cdot \frac{3 + 201}{2} \quad (\text{aritmeettisen jonon summa!}) \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 100 \cdot 102$$

$$= \underline{10200} \quad (1 \text{ p.})$$

3. Jonne tallettaa aina vuoden alussa 1000€ tilille, jonka nettokorko on 2%. Korko lisätään pääomaan aina vuoden lopussa. Kuinka monen vuoden kuluttua tilillä on yli 50 000 €? (4 p.)

n :nen vuoden alussa tilillä on rahaa a_n (€):

$$a_1 = 1000$$

$$a_2 = 1,02 \cdot 1000 + 1000$$

$$a_3 = 1,02^2 \cdot 1000 + 1,02 \cdot 1000 + 1000$$

$$a_4 = 1,02^3 \cdot 1000 + 1,02^2 \cdot 1000 + 1,02 \cdot 1000 + 1000$$

⋮

$$a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1000(1-1,02^n)}{1-1,02} \quad (\text{Geometrisen jonon summa!}) \quad (1 \text{ p.})$$

Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{1000(1-1,02^n)}{1-1,02} > 50000 \quad \parallel \cdot (1-1,02) < 0!!$$

$$1000(1-1,02^n) < 50000 \cdot (1-1,02) \quad \parallel :1000$$

$$1-1,02^n < 50 \cdot (-0,02) \quad \parallel -1$$

$$-1,02^n < -2 \quad \parallel \cdot (-1) < 0!!$$

$$1,02^n > 2 \quad (1 \text{ p.})$$

$$n > \frac{\lg(2)}{\lg(1,02)}$$

$$n > 35,003 \quad (1 \text{ p.})$$

Vastaus: $a_{36} > 50000$ joten 35 vuoden kuluttua tilillä on yli 50 000€ (1 p.)