Lyhyt matematiikka YO-koe 19.3.2014
Ratkaisut (V. A.)

---

1. a)

$$2x^2 = x$$
$$2x^2 - x = 0$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 0}}{2\cdot 2}$$
$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 0}}$$

b)

$$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}$$
$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

c)

$$\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$$
$$3(x-1) = 4x$$
$$3x - 3 = 4x$$
$$-x = 3$$
$$\underline{\underline{x = -3}}$$

2. a)

y – akselilla $x = 0$:
$$x - 5y = 4$$
$$0 - 5y = 4 \;||: (-5)$$
$$y = -\frac{4}{5}$$
Vast: $\underline{\underline{\text{Pisteessä } \left(0,\ -\frac{4}{5}\right)}}$.

b)

$$4x^3 = 48 \;||: 4$$
$$x^3 = 12$$
$$\underline{\underline{x = \sqrt[3]{12}}}$$
$$= 2,28942...$$
$$\approx \underline{\underline{2,289}}$$

c)

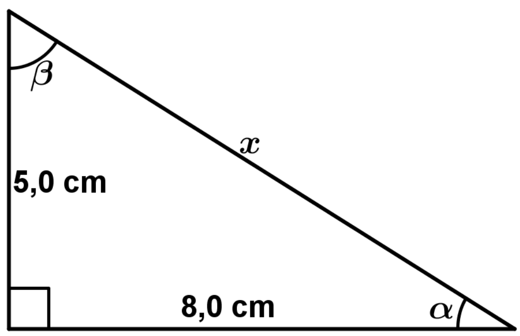
$$2\cdot 3^x = 162 \;||: 2$$
$$3^x = 81$$
$$x = \frac{\lg 81}{\lg 3}$$
$$\underline{\underline{x = 4}}$$

3. a)

$$x^2 = 8,0^2 + 5,0^2$$
$$x^2 = 89$$
$$(x = -\sqrt{89}) \quad \text{tai}$$
$$x = \sqrt{89} = 9,43398...$$
$$\approx \underline{\underline{9,4 \text{ cm}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{5,0}{8,0} \;||\tan^{-1}$$
$$\alpha = 32,0053...^\circ$$
$$\underline{\underline{\alpha \approx 32^\circ}}$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ$$
$$\underline{\underline{\beta = 58^\circ}}$$



b)

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2}$$
$$2(x+y) = 5(x-y)$$
$$2x + 2y = 5x - 5y$$
$$-3x = -7y \;||: (-3)$$
$$x = \frac{7}{3}y \;||: y$$
$$\underline{\underline{\frac{x}{y} = \frac{7}{3}}}$$

4. a) Olkoon alkuperäisen kuution särmä = a. Silloin pienemmän kuution särmä = $\frac{1}{2}a$.

$$\text{Tilavuuksien suhde} = \frac{V_{\text{pieni}}}{V_{\text{iso}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^3}{a^3} = \frac{\frac{1}{8}\cancel{a^3}}{\cancel{a^3}} = \frac{1}{8} = 0{,}125 .$$

Tilavuus pienenee $1-0{,}125 = 0{,}875 = \underline{\underline{87{,}5\%}}$

b)

$$\text{Alojen suhde} = \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{iso}}} = \frac{6\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{6\cdot a^2} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 .$$

Ala pienenee $1-0{,}25 = \underline{\underline{75\%}}$

5. Olkoon x lisättävä kuohuviinin määrä (litraa).

$$\frac{\text{Mehu}}{\text{Booli}} = 20\%$$

$$\frac{0{,}30\cdot 4{,}0}{4+x} = 0{,}20 \;\|\cdot(4+x)$$

$$1{,}2 = 0{,}20\cdot(4+x)$$

$$1{,}2 = 0{,}8 + 0{,}2x$$

$$-0{,}2x = -0{,}4 \;\|:(-0{,}2)$$

$$x = 2$$

Vastaus: Kuohuviiniä on lisättävä 2 litraa.

6. Olkoon x = fasaanien määrä ja y = kaniinien määrä.

$$\begin{cases} \text{Päitä} = 35 \\ \text{Jalkoja} = 94 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 35 \;\|\cdot(-2) \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + -2y = -70 \\ \quad 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

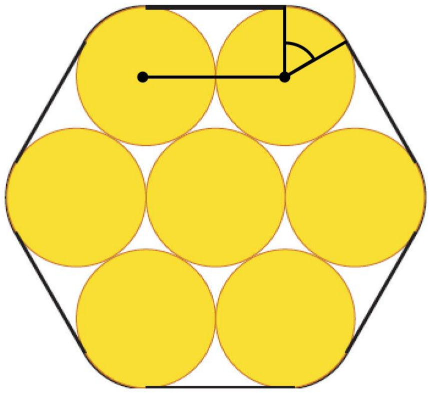
$$2y = 24 \;\|:2$$

$$y = 12 \quad\Rightarrow\quad x + y = 35 \quad\Leftrightarrow\quad x = 35 - 12 = 23$$

Vastaus: Häkissä on fasaaneja 23 ja kaniineja 12 kappaletta.

7. Vaijerin pituus *d* muodostuu 6:sta janasta ja 6:sta sektorin kaaresta.

$$d = 6\cdot(2r)+6\cdot\frac{\alpha}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot r \quad \| \, r=10 \text{ cm ja } \alpha = 60^\circ$$
$$= 6\cdot 20 + 6\cdot\frac{60}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot 10$$
$$= 120 + 20\pi$$
$$= 182{,}8318...$$
$$\approx \underline{\underline{183 \text{ cm}}}$$



8.

1. vaihe: 100 €
2. vaihe: $3\cdot 100$ €
3. vaihe: $3\cdot 3\cdot 100$ € jne.

Vaiheet muodostavat geometrisen jonon, jossa q = 3. Vaiheiden summa on 54,1 miljardia. Olkoon n tarvittavien vaiheiden määrä.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 54{,}1\cdot 10^9 \text{ (€)}$$
$$\frac{100(1-3^n)}{1-3} = 54100000000 \, \| \cdot(1-3)$$
$$100(1-3^n) = -108200000000 \, \| : 100$$
$$1-3^n = -1082000000$$
$$-3^n = -1082000001 \, \| : (-1)$$
$$3^n = 1082000001$$
$$n = \frac{\lg 1082000001}{\lg 3}$$
$$n = 18{,}9348...$$

Vastaus: Ylitys tapahtuu 19. vaiheen jälkeen

9. Olkoon asiakkaat ja heidän setelinsä seuraavat: A(5), B(5), C(10) ja D(10).

Suotuisia järjestyksiä ovat (8 kpl.):

(A,B,C,D)	(B,A,C,D)	(= 5,5,10,10)
(A,B,D,C)	(B,A,D,C)	(= 5,5,10,10)
(A,C,B,D)	(B,C,A,D)	(= 5,10,5,10)
(A,D,B,C)	(B,D,A,C)	(= 5,10,5,10)

Kaikkiaan 4 henkilöä voivat tulla $4! = 24$ eri järjestyksessä.

$$\text{P(Myyjä voi antaa oikean vaihtorahan)} = \frac{8}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

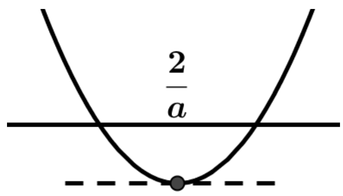
10. a) $f(x) = ax^2 - 4x + 8$.

Jos *a* = 0, niin $f(x) = 0 \cdot x^2 - 4x + 8 = -4x + 8$, jonka kuvaaja on laskeva suora. Sillä ei siten ole pienintä arvoa!

Jos *a* < 0, niin $f(x) = ax^2 - 4x + 8$ on alaspäin aukeava paraabeli. Tällöinkään sillä ei ole olemassa pienintä arvoa!

Luvun a on siis **oltava *a* > 0**. Tällöin pienin arvo tulee paraabelin huipussa eli derivaatan nollakohdassa:

$$f'(x) = 2ax - 4$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax - 4 = 0$$
$$2ax = 4 \;||:2a$$
$$x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

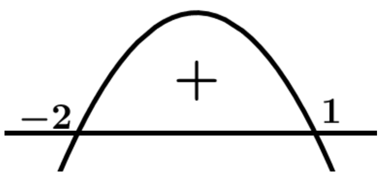


Pienin arvo on 0:

$$f\left(\frac{2}{a}\right) = 0$$
$$a\left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{a} + 8 = 0$$
$$\frac{4}{a} - \frac{8}{a} + 8 = 0$$
$$-\frac{4}{a} = -8 \;|| \cdot (-a)$$
$$4 = 8a \;||:8$$
$$\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

b) $g(x) = bx^2 - 4x + 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 1$.

Tilanteen on oltava kuvan mukainen, jolloin oltava $b < 0$ (alaspäin aukeava paraabeli):



Lukujen -2 ja 1 on oltava funktion $g(x)$ nollakohdat:

$$g(-2) = 0$$
$$b(-2)^2 - 4(-2) + 8 = 0$$
$$4b + 16 = 0$$
$$b = -4$$

$$g(1) = 0$$
$$b \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 8 = 0$$
$$b = -4$$

Näin ollen vakio $\underline{\underline{b = -4}}$

11. $\sqrt[3]{a} \approx x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2}\right), \; n = 1, 2, \ldots$ ja $x_1 = 1$.

$$\sqrt[3]{9} \approx x_2 = \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{9}{(x_1)^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot 1 + \frac{9}{1^2}\right) = \frac{11}{3} \approx 3,666666...$$

$$x_3 \approx \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{11}{3} + \frac{9}{\left(\frac{11}{3}\right)^2}\right) = 2,66758494...$$

$$x_4 \approx \cdots \approx 2,19997456...$$
$$x_5 \approx 2,08649875...$$
$$x_6 \approx 2,08010352...$$
$$x_7 \approx 2,08008382...$$
$$x_8 \approx 2,08008382...$$

Vastaus: Kun n = 7, ovat lukujen x_7 ja x_8 ensimmäiset seitsemän desimaalia samoja.

12. a) Turvallisuusluku T määritellään $T = -\lg p, \; 0 < p \le 1$.

$$T_{alkoholi} = -\lg p = 3,8$$
$$\lg p = -3,8 \,\|\, \lg = \log_{10}$$
$$p = 10^{-3,8}$$
$$p = 0,00015848...$$

$$T_{tapaturma} = -\lg p = 3,4$$
$$\lg p = -3,4 \,\|\, \lg = \log_{10}$$
$$p = 10^{-3,4}$$
$$p = 0,000398107...$$

Koska $p_{tapaturma} > p_{alkoholi}$, on tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys suurempi.

b)

$$T_{tieliikenne} = -\lg p = 3,2$$
$$\lg p = -3,2 \,\|\, \lg = \log_{10}$$
$$p = 10^{-3,2}$$
$$p = 0,000630957...$$

Tieliikenteessä loukkaantumisen todennäköisyys
$p = 10^{-3,2} = 0,000630957...$
Vuosittain loukkaantuu siis n.
$10^{-3,2} \cdot 5400000 = 3407,16966$
$\approx$ 3400 suomalaista.

13. a) Merkitään $y = -x^3 + x^2 + 3x = f(x)$.

Tangentin kulmakertoimen kertoo derivaattafunktio $k(x) = f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$.

Funktio $k(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo on paraabelin huipussa eli **sen** derivaatan nollakohdassa:

$$k'(x) = -6x + 2$$
$$k'(x) = 0$$
$$-6x + 2 = 0$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Pisteen y-koordinaatti

$$y = -x^3 + x^2 + 3x$$
$$y = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3}$$
$$y = \frac{29}{27}$$

Tangentti on pisteessä $\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)}}$.

b) Ko. pisteessä olevan tangentin kulmakerroin on $k(\frac{1}{3}) = f'(\frac{1}{3}) = -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{10}{3}$.

Tangentin yhtälö:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - \frac{29}{27} = \frac{10}{3}(x - \frac{1}{3})$$
$$\underline{\underline{y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}}}$$

14. a) $y = a(x-2014)+b,$ missä x on vuosiluku. Sijoitetaan tiedot yhtälöön:

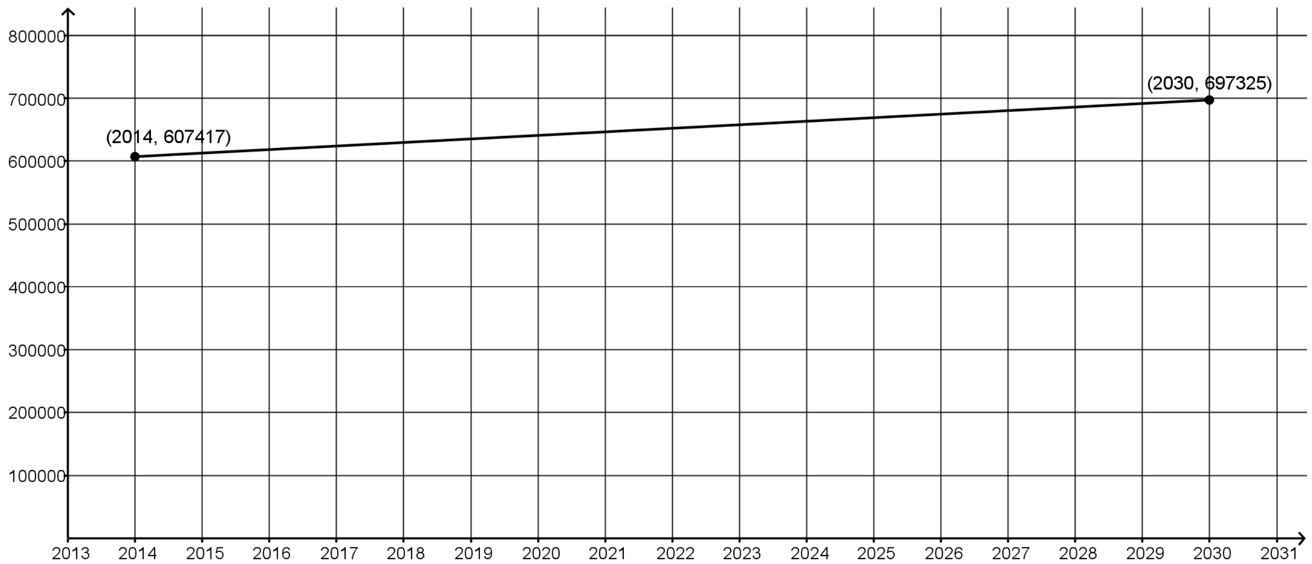
$$\begin{cases} 607417 = a(2014-2014)+b & \Rightarrow \underline{\underline{b = 607417}} \\ 629894 = a(2018-2014)+b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 629894 &= 4a + 607417 \\ 4a &= 22477 \quad \|:4 \\ \underline{\underline{a}} &\underline{\underline{= 5619,25}} \end{aligned}$$

b) Ennuste vuonna 2014 = $y = 607417$ asukasta.
Ennuste vuonna 2030 = $y = 5619,25 \cdot (2030-2014)+607417 = 697325.$

Asukasluvun kasvu aikavälillä 2014 – 2030 on $697325 - 607417 = 89908 \approx \underline{\underline{90000 \text{ asukasta}}}.$

c) Asukasluvun y kuvaaja välillä $2014 \le x \le 2030$:



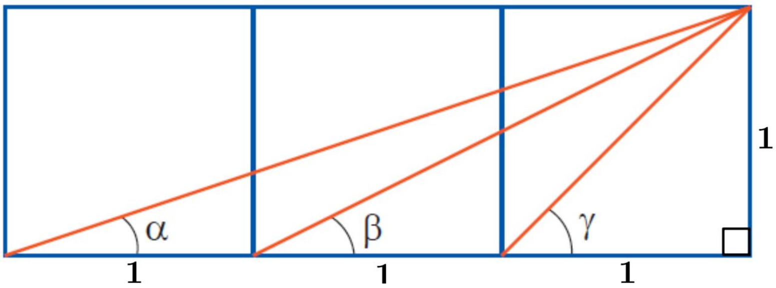
15. a) $\tan\gamma = 1,\ 0^\circ \le \gamma \le 360^\circ.$

$\gamma = 45^\circ + n\cdot 180^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Välille $0^\circ \le \gamma \le 360^\circ$ kuuluvat kulmat $\underline{\underline{\gamma = 45^\circ}}$ ja $\gamma = 45^\circ + 1\cdot 180^\circ = \underline{\underline{225^\circ}}$.

b) Kuvan suorakulmaisista kolmioista saadaan:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$



Koska $\tan(\alpha+\beta) = 1$, niin a-kohdan perusteella $\alpha + \beta = 45^\circ$. Kulma γ on neliön sivun ja lävistäjän välisenä kulmana 45°. Näin ollen $\underline{\underline{\alpha + \beta = \gamma \quad (= 45^\circ)}}$.