1. a)

$$\frac{x+2}{5}=\frac{x-3}{6} \quad \| \text{ kerrotaan ristiin}$$
$$6(x+2)=5(x-3)$$
$$6x+12=5x-15$$
$$\underline{\underline{x=-27}}$$

b)

$$\frac{x+1}{y-1}+\frac{y-1}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}+\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1}+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}$$
$$=3+\frac{1}{3}$$
$$=\underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

c)

Leikkauspiste yhtälöparilla:

$$\begin{cases} x+5y=1 \\ x-5y=5 \end{cases} \quad +$$
$$2x=6 \quad \|:2$$
$$x=3$$

$$x+5y=1$$
$$3+5y=1$$
$$5y=-2$$
$$y=-\frac{2}{5}$$

Leikkauspiste on $\underline{\underline{\left(3,\ -\frac{2}{5}\right)}}$

2. a)

$$2^x=2$$
$$\underline{\underline{x=1}}$$

b)

$$2^x=\frac{1}{2}$$
$$2^x=2^{-1}$$
$$\underline{\underline{x=-1}}$$

c)

$$2^x=8^2$$
$$2^x=64$$
$$2^x=2^6$$
$$\underline{\underline{x=6}}$$

d)

$$3^x=\frac{1}{3^5}$$
$$3^x=3^{-5}$$
$$\underline{\underline{x=-5}}$$

e)

$$10^x=1000$$
$$10^x=10^3$$
$$\underline{\underline{x=3}}$$

f)

$$10^x=0{,}01$$
$$10^x=\frac{1}{100}$$
$$10^x=\frac{1}{10^2}$$
$$10^x=10^{-2}$$
$$\underline{\underline{x=-2}}$$

Kaikki kohdat voi ratkaista myös laskimella logaritmeilla:

$$k^x=a \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\lg a}{\lg k}$$

3. a)

$$(x+1)(2-x)-2=0$$
$$2x-x^2+2-x-2=0$$
$$-x^2+x=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 0}}{2\cdot(-1)}$$
$$=\frac{-1\pm 1}{-2} \qquad \underline{\underline{x=0 \text{ tai } x=1}}$$

b)

n	n^3-3n+1
-1	$(-1)^3-3\cdot(-1)+1=3>0$
0	$\ldots=1>0$
1	$\ldots=-1<0$
2	$\ldots=3>0$
3	$\ldots=19>0$
4	$\ldots=53>0$

Lausekkeen arvo on positiivinen, kun $\underline{\underline{n=-1,\ 0,\ 2,\ 3 \text{ tai } 4.}}$

c)

$$A = \pi r^2 = 520\ (\text{cm}^2)\ \|:\pi$$

$$r^2 = \frac{520}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{520}{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \text{Halkaisija } d = 2r = 2\cdot\sqrt{\frac{520}{\pi}} = 25,7310039... \approx \underline{\underline{25,7 \text{ cm}}}$$

4. Kootaan tiedot taulukkoon:

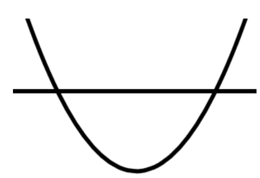
	Tilavuus (ml)	**Hinta (€)**	**Millilitrahinta (€/ml)**
Vanha	100	1,50	$\frac{1,50}{100} = 0,015$
Uusi	$1,25\cdot 100 = 125$	$1,40\cdot 1,50 = 2,10$	$\frac{2,10}{125} = 0,0168$

Uusi tahna on $\frac{0,0168-0,015}{0,015} = \frac{0,0018}{0,015} = 0,12 = \underline{\underline{12\% \text{ kalliimpaa}}}$.

5. Merkitään summaa funktiona

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 + (x-9)^2 \\ &= (x-3)(x-3) + (x-9)(x-9) \\ &= x^2 - 3x - 3x + 9 + x^2 - 9x - 9x + 81 \\ &= 2x^2 - 24x + 90 \end{aligned}$$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten pienin arvo saadaan paraabelin huipussa. Huipussa derivaatta = 0.



$$f'(x) = 4x - 24$$
$$f'(x) = 0$$
$$4x - 24 = 0$$
$$4x = 24$$
$$\underline{\underline{x = 6}}$$

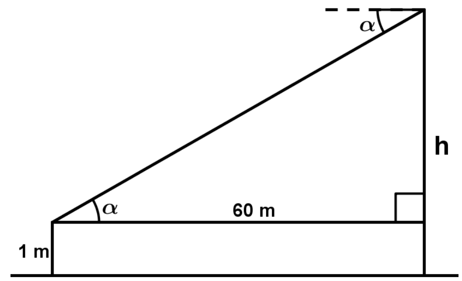
Vastaus: Summa on pienin, kun $x = 6$.

6. a)

$$3,3\cdot(h-1)=60$$
$$3,3h-3,3=60$$
$$3,3h=63,3 \quad \| :3,3$$
$$h=19,181818...$$
$$\underline{\underline{h\approx 19\text{ m.}}}$$

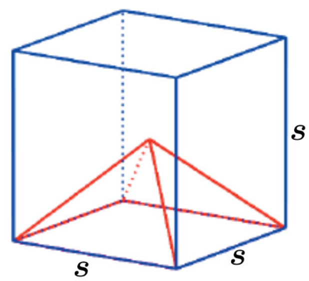
b)

$$\tan\alpha=\frac{h-1}{60}$$
$$\tan\alpha=\frac{19,181818...-1}{60} \quad \| \tan^{-1}$$
$$\alpha=16,8583987...^\circ$$
$$\underline{\underline{\alpha\approx 17^\circ}}$$



7. $V_{kuutio}=s^3$ $\qquad$ $V_{pyramidi}=\frac{1}{3}A_{pohja}\cdot h=\frac{1}{3}s^2\cdot\frac{s}{2}=\frac{1}{6}s^3$

Tilavuuksien suhde $\frac{V_{pyramidi}}{V_{kuutio}}=\frac{\frac{1}{6}\cancel{s^3}}{\cancel{s^3}}=\frac{1}{6}=\underline{\underline{1:6}}$.



8. a) Keskiarvo $\bar{x}=\frac{9173+8266+...+5177}{6}=\frac{39330}{6}=\underline{\underline{6555}}$.

Jokerit	9 173
HIFK	8 266
Kärpät	5 821
TPS	5 534
Tappara	5 359
Ilves	5 177

Joukkue	Katsojamäärä x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
Jokerit	9173	2618	6853924
HIFK	8266	1711	2927521
Kärpät	5821	-734	538756
TPS	5534	-1021	1042441
Tappara	5359	-1196	1430416
Ilves	5177	-1378	1898884
yht.	39330		14691942

Keskihajonta $s=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{14691942}{6}}=1564,8185...\approx\underline{\underline{1565}}$. (Voi laskea myös laskimella!)

b) Taulukon kohdasta $x-\bar{x}$ nähdään poikkeamat keskiarvosta. Nähdään, että Jokereilla ja HIFK:lla poikkeama on enemmän kuin keskihajonta 1565.

9. a)

$$I_{Raimo} = \frac{m}{h^2} = \frac{102}{1{,}93^2} = 27{,}3832... \approx \underline{\underline{27{,}4}}.$$

$$J_{Raimo} = \frac{1{,}3m}{h^{2{,}5}} = \frac{1{,}3 \cdot 102}{1{,}93^{2{,}5}} = 25{,}6241... \approx \underline{\underline{25{,}6}}.$$

b)

$$I = 25$$

$$\frac{m}{h^2} = 25$$

$$\frac{m}{1{,}60^2} = 25$$

$$m = 25 \cdot 1{,}60^2$$

$$m = 64 \text{ (kg)}$$

$$J_{Hanna} = \frac{1{,}3 \cdot 64}{1{,}60^{2{,}5}} = 25{,}69350... \approx \underline{\underline{25{,}7}}.$$

c) Indeksit ovat samat, kun

$$\frac{m}{h^2} = \frac{1{,}3m}{h^{2{,}5}} \quad || \text{ kerrotaan ristiin}$$

$$1{,}3mh^2 = mh^{2{,}5} \quad ||: m$$

$$1{,}3h^2 = h^{2{,}5} \quad ||: h^2$$

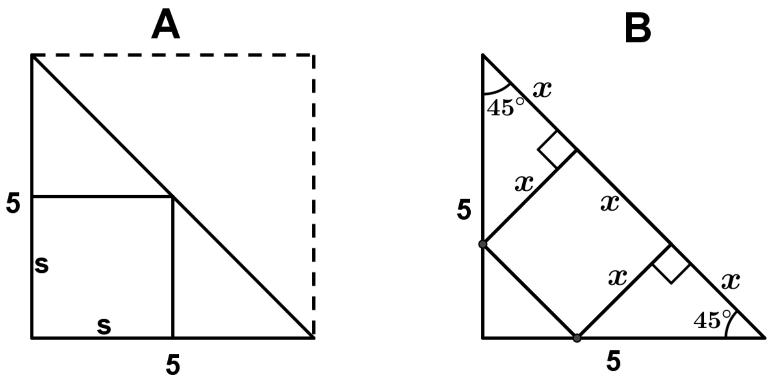
$$1{,}3 = \frac{h^{2{,}5}}{h^2} = h^{2{,}5-2} = h^{0{,}5} \quad || (\ )^2$$

$$1{,}3^2 = h$$

$$\underline{\underline{h = 1{,}69}}$$

Vastaus: 169 cm pitkän henkilön painoindeksit ovat yhtäsuuret.

10.



Kuvion A perusteella neliön sivun pituus $s = \frac{5}{2} = 2,5$ ja ala $A_\text{A} = 2,5^2 = 6,25$.

Kuvion B perusteella ison kolmion hypotenuusa on $3x$. Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned}(3x)^2 &= 5^2 + 5^2 \\ 9x^2 &= 50 \quad ||:9 \\ x^2 &= \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9} = A_B\end{aligned}$$

Kuvion A neliön ala on siis suurempi.

11. Tilavuudeltaan $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ 24 pientä munkkia yhteensä ja 3 isoa munkkia yhteensä ovat samat.

$$V_{pienet} = 24 \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 = 32\pi r_1^3$$

$$V_{isot} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = 4\pi r_2^3$$

$$\begin{aligned}V_{pienet} &= V_{isot} \\ 32\pi r_1^3 &= 4\pi r_2^3 \quad ||:4\pi \\ 8r_1^3 &= r_2^3 \quad ||\sqrt[3]{\ } \\ 2r_1 &= r_2\end{aligned}$$

Pallojen alojen $(A = 4\pi r^2)$ suhde:

$$\frac{A_{pienet}}{A_{isot}} = \frac{24 \cdot 4\pi r_1^2}{3 \cdot 4\pi r_2^2} = \frac{24 \cdot \cancel{4\pi} r_1^2}{3 \cdot \cancel{4\pi}(2r_1)^2} = \frac{24\cancel{r_1^2}}{3 \cdot 4\cancel{r_1^2}} = \frac{24}{12} = 2 = \underline{\underline{2:1}}.$$

12. k = päästöjen kasvuprosenttikerroin.
a = päästöt vuonna 1990.

Vuosina 1990-2008 (18 vuotta) päästöt kasvoivat 39%, joten

$$k^{18} \cdot a = 1,39a \,||: a$$
$$k^{18} = 1,39 \,|| \sqrt[18]{\;}$$
$$k = \sqrt[18]{1,39} = 1,018463...$$

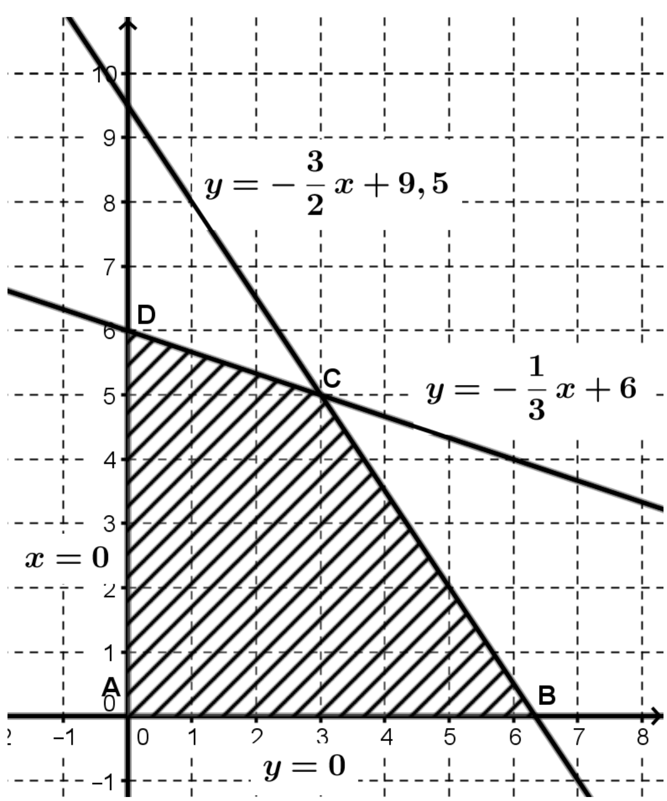
Päästöt yhteensä vuosina 1990-2015 (25 vuotta):

$$\begin{aligned} k^{15} \cdot a &= (\sqrt[18]{1,39})^{25} \cdot a \\ &= 1,018463...^{25} \cdot a \\ &= 1,5799075...a \\ &\approx 1,58a \end{aligned}$$

Vastaus: Päästöt kasvavat 58 %.

13. a)

$$\begin{cases} x + 3y \le 18 \\ 3x + 2y \le 19 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y \le -x + 18 \,||: 3 \\ 2y \le -3x + 19 \,||: 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le -\frac{1}{3}x + 6 \\ y \le -\frac{3}{2}x + 9,5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Rajasuorat ovat} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 6 \\ y = -\frac{3}{2}x + 9,5 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



b) Nelikulmion kärkipisteet:

A = (0, 0)

D = (0, 6) (saadaan suoran yhtälöstä $y = -\frac{1}{3}x + \boxed{6}$)

Lasketaan B:

$$-\frac{3}{2}x + 9,5 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x = -9,5 \;||: (-\frac{3}{2})$$

$$x = \frac{19}{3} \qquad \Rightarrow \quad B = \left(\frac{19}{3},\ 0\right).$$

Lasketaan kärki C yhtälöparilla:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 6 \;||\cdot(-1) \\ y = -\frac{3}{2}x + 9,5 \end{cases} \quad +$$

$$0 = -\frac{7}{6}x + 3,5$$

$$\frac{7}{6}x = 3,5 \;||: \frac{7}{6}$$

$$x = 3 \qquad \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 6$$

$$y = -\frac{1}{3}\cdot 3 + 6 = 5 \qquad \Rightarrow \quad C = (3,\ 5).$$

Lauseke $2x + y$ saa pienimmän ja suurimman arvon jossain nelikulmion kärkipisteessä.

$(x,\ y)$	$2x + y$
A = (0, 0)	$2\cdot 0 + 0 = 0$
$B = \left(\frac{19}{3},\ 0\right)$	$2\cdot\frac{19}{3} + 0 = \frac{38}{3}$ $(= 12,666...)$
C = (3, 5)	$2\cdot 3 + 5 = 11$
D = (0, 6)	$2\cdot 0 + 6 = 6$

Vastaus. Lausekkeen $2x + y$ pienin arvo nelikulmiossa on 0 ja suurin arvo $\frac{38}{3}$.

14. a) Sovelletaan annuiteettikaavaa $A = Kq^n \dfrac{1-q}{1-q^n}$, jossa $K = 8000$ €, $p = \dfrac{6,6}{12} = 0,55$,

$q = 1 + \dfrac{p}{100} = 1,0055$ ja $n = 24$.

$$\begin{aligned} A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} &= 8000 \cdot 1,0055^{24} \cdot \frac{1-1,0055}{1-1,0055^{24}} \\ &= 356,731696... \\ &\approx \underline{\underline{356,73 \text{ €}}} \end{aligned}$$

b)

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$$

$$\begin{aligned} V_{12} &= 8000 \cdot 1,0055^{12} - 356,73 \cdot \frac{1-1,0055^{12}}{1-1,0055} \\ &= 4131,61180... \\ &\approx \underline{\underline{4131,61 \text{ €}}} \end{aligned}$$

c) Kristian maksaa korkoa $24 \cdot A - 8000 = 24 \cdot 356,73 - 8000 = \underline{\underline{561,52 \text{ €}}}$.

15. a) Olkoon ampumispiste $\text{A} = (20,\ 10,\ 5)$. $\overline{v} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$.

Vektorin $\overline{v}$ pituus on $|\overline{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$.

Vektorin $\overline{v}$ suuntainen yksikkövektori on $\overline{v}^0 = \dfrac{1}{|\overline{v}|}\overline{v} = \dfrac{1}{7}(2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}) = \dfrac{2}{7}\overline{i} - \dfrac{3}{7}\overline{j} + \dfrac{6}{7}\overline{k}$.

Muodostetaan räjähdyspisteen P paikkavektori:

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}} &= \overline{\text{OA}} + 105\overline{v}^0 \\ &= 20\overline{i} + 10\overline{j} + 5\overline{k} + 105(\frac{2}{7}\overline{i} - \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}) \\ &= 20\overline{i} + 10\overline{j} + 5\overline{k} + 30\overline{i} - 45\overline{j} + 90\overline{k} \\ &= 50\overline{i} - 35\overline{j} + 95\overline{k} \quad \Rightarrow \quad \text{Räjähdyspiste on siten } \underline{\underline{(50,\ -35,\ 95)}}. \end{aligned}$$

b) Etäisyys katsojista on paikkavektorin $\overline{\text{OP}}$ pituus.

$$\left|\overline{\text{OP}}\right| = \sqrt{50^2 + (-35)^2 + 95^2} = \sqrt{12750} = 112,91589... \approx \underline{\underline{113 \text{ m}}}.$$