

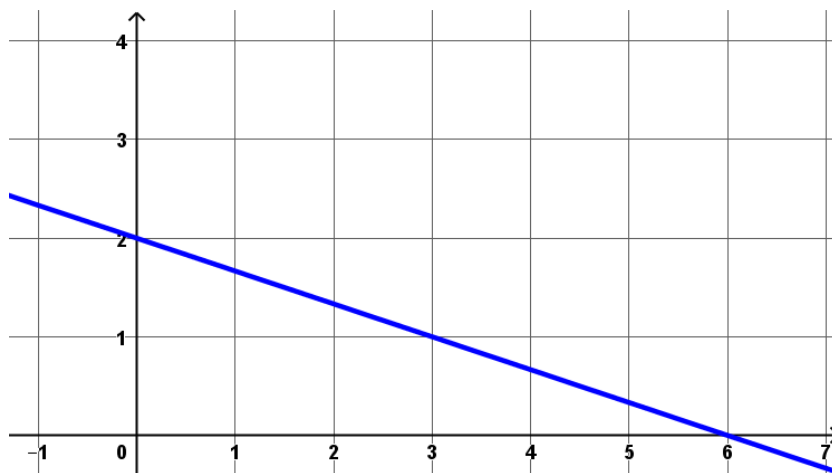
# MAB4-Harjoituskoe

## RATKAISUT

### A-OSA

1. Vastaa oheisen kuvan perusteella

- a) Mikä on kuvan suoran kulmakerroin? (1 p.)
- b) Mikä on kuvan suoran yhtälö? (1 p.)
- c) Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (3, 1) kautta ja on kohtisuorassa kuvan suoraa vastaan? (3 p.)



a)  $k = -\frac{1}{3}$  (1 p.)

b)  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  (1 p.)

c) Suora on kohtisuorassa kuvan suoraa vastaan  $\Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot k = -1 \Rightarrow k = 3.$  (1 p.)

Suoran yhtälö:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 1 = 3(x - 3) \quad (1 \text{ p.})$$

$$y - 1 = 3x - 9$$

$$\underline{\underline{y = 3x - 8}} \quad (1 \text{ p.})$$

## 2. Ratkaise yhtälöt

a)  $2 + 2x^2 = 20$  (2 p.)

b)  $2^{x+3} = 4$  (2 p.)

a)

$$2 + 2x^2 = 20 \parallel -2$$

$$2x^2 = 18 \parallel : 2$$

$$x^2 = 9 \parallel \sqrt{\quad}$$

$$\underline{\underline{x = -3}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x = 3}} \quad (1 \text{ p.} + 1 \text{ p.})$$

b)

$$2^{x+3} = 4$$

$$2^{x+3} = 2^2 \quad (1 \text{ p.})$$

$$x + 3 = 2$$

$$\underline{\underline{x = -1}} \quad (1 \text{ p.})$$

3. Laske  $\sum_{n=1}^{25} (n+2)$ . (3 p.)

$$\sum_{n=1}^{25} (n+2) = (1+2) + (2+2) + (3+2) + \dots + (25+2)$$

$$= 3 + 4 + 5 + \dots + 27 \quad \text{Kyseessä on aritmeettinen summa!} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 25 \cdot \frac{3+27}{2} \quad \left( S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \right) \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 25 \cdot 15$$

$$= \underline{\underline{375}} \quad (1 \text{ p.})$$

**B-OSA**

1. Tarkastellaan suoria  $y + 2x + 244 = 0$  ja  $2y + 10x + 50 = 0$ .

a) Mitkä ovat suorien kulmakertoimet? (4 p.)

b) Laske, missä pisteessä suorat leikkaavat toisensa. (2 p.)

a) Viedään suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon, jotta voidaan nähdä niiden kulmakertoimet:

$$y + 2x + 244 = 0$$

$$y = -2x - 244 \quad (1 \text{ p.})$$

$$\Rightarrow \underline{k = -2} \quad (1 \text{ p.})$$

$$2y + 10x + 50 = 0$$

$$2y = -10x - 50 \quad || : 2$$

$$y = -5x - 25 \quad (1 \text{ p.})$$

$$\Rightarrow \underline{k = -5} \quad (1 \text{ p.})$$

b) Ratkaistaan leikkauspiste yhtälöparilla:

$$\text{solve} \left( \begin{cases} y = -2 \cdot x - 244 \\ y = -5 \cdot x - 25 \end{cases}, \{x, y\} \right)$$

$$x = 73 \text{ and } y = -390 \quad (1 \text{ p.})$$

Vastaus. Suorat leikkaavat pisteessä (73, -390). (1 p.)

2. Geometrinen lukujono alkaa 4, 12, ... Onko luku 6377292 jonon jäsen?

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{4} = 3. \quad (1 \text{ p.})$$

$$a_n = 6377292$$

$$4 \cdot 3^{n-1} = 6377292 \quad (2 \text{ p.})$$

$$\text{solve} \left( 4 \cdot 3^{n-1} = 6377292, n \right) \quad n = 14 \quad (2 \text{ p.})$$

Koska  $n = 14$  on kokonaisluku, niin luku 6377292 on jonon (14.) jäsen. (1 p.)

3. Matin kuukausipalkka oli viime vuonna 1900 €. Tänä vuonna palkka nousi 2000 euroon. Mikä on Matin palkka 10 vuoden kuluttua, jos palkkakehitys jatkuu samanlaisena ja se noudattaa

a) lineaarista mallia,

b) eksponentiaalista mallia?

a) Kun palkkakehitys noudattaa lineaarista mallia, se kasvaa vuosittain *yhtä monta euroa*. (1 p.)

Palkan nousu on vuosittain  $2000 - 1900 = 100$  euroa. (1 p.)

Palkka on 10 vuoden kuluttua  $2000 + 100 \cdot 10 = \underline{\underline{3000}}$  (€). (1 p.)

b) Kun palkkakehitys noudattaa eksponentiaalista mallia, se kasvaa vuosittain *yhtä monta prosenttia*.

Vuotuinen kasvuprosenttikerroin  $k$ : (1 p.)

$$1900 \cdot k = 2000 \quad || : 1900$$

$$k = \frac{2000}{1900} = \frac{20}{19} \quad (=1,0526\dots) \quad (1 \text{ p.})$$

Palkka on 10 vuoden kuluttua:

$$\begin{aligned} 2000 \cdot k^{10} &= 2000 \cdot \left(\frac{20}{19}\right)^{10} \\ &= 3340,3651\dots \\ &\approx \underline{\underline{3340}} \text{ (€)} \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$

4. Erään osakkeen arvo tippui kolmessa vuodessa yhteensä 9 prosenttia.

a) Kuinka monta prosenttia oli keskimäärin vuosittainen osakkeen arvon lasku kyseisenä aikana?

b) Kuinka monta prosenttia osakkeen arvon pitäisi nousta tämän jälkeen vuosittain seuraavien kolmen vuoden aikana, jotta se palautuisi takaisin alkuperäiseen arvoonsa? Anna vastaukset prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

a)

$a$  = alkuperäinen osakkeen arvo.

$k$  = vuotuinen vähenemisprosenttikerroin.

(1 p.)

$$a \cdot k^3 = 0,91 \cdot a \quad || : a$$

$$k^3 = 0,91 \quad || \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$k = 0,9690... \quad (1 \text{ p.})$$

Keskimääräinen vuotuinen väheneminen oli siis  $1 - 0,9690... = 0,0309... \approx \underline{\underline{3,1\%}}$  (1 p.)

b)

$p$  = vuotuinen kasvuprosenttikerroin.

$$0,91a \cdot p^3 = a \quad || : a \quad (1 \text{ p.})$$

$$0,91 \cdot p^3 = 1 \quad || : 0,91$$

$$p^3 = \frac{1}{0,91} \quad || \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$p = 1,03193... \quad (1 \text{ p.})$$

Vuotuisen kasvun täytyisi olla siis  $1,03193... - 1 = 0,03193... \approx \underline{\underline{3,2\%}}$  (1 p.)

5. Aritmeettinen lukujono alkaa 2, 5, 8, ... Kuinka monta lukua jonon alusta on laskettava yhteen, kun niiden summa on 8251?

$n$  = tarvittavien lukujen määrä. (1 p.)

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n-1\end{aligned}\quad (1 \text{ p.})$$

Summa:

$$\begin{aligned}S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ 8251 &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ 8251 &= n \cdot \frac{2 + (3n-1)}{2}\end{aligned}\quad (2 \text{ p.})$$

$$\begin{aligned}\text{solve}\left(8251 = n \cdot \frac{2+3 \cdot n-1}{2}, n\right) \\ n = \frac{-223}{3} \text{ or } n = 74\end{aligned}\quad (1 \text{ p.})$$

Lukumäärä  $n$  ei voi olla negatiivinen!

Vastaus: On laskettava yhteen jonon 74 ensimmäistä lukua. (1 p.)

6. Mari päättää harjoitella matematiikan kokeeseen 30 päivän ajan seuraavasti: ensimmäisenä päivänä hän harjoittelee 30 minuuttia ja tämän jälkeen jokaisena päivänä aina viisi prosenttia pidemmän ajan kuin edellisenä päivänä.

a) Kuinka monta minuuttia hän harjoittelee viimeisenä päivänä?

b) Kuinka monta tuntia ja minuuttia hän harjoittelee koko ajanjaksona yhteensä?

a) Harjoitteluajat muodostavat geometrisen lukujonon.

$$q = 1,05 \quad (1 \text{ p.})$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 30 \cdot 1,05^{n-1}$$

$$a_{30} = 30 \cdot 1,05^{30-1} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 123,484\dots$$

$$\approx 123 \text{ (min.)}$$

Vast. Viimeisenä päivänä hän harjoittelee 123 min. (1 p.)

b) Lasketaan geometrinen summa:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{30} = \frac{30(1-1,05^{30})}{1-1,05} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 1993,165\dots \text{ min.}$$

$$= 1993,165\dots \div 60 \text{ h}$$

$$= 33,219\dots \text{ h} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 33 \text{ h} + 0,219\dots \cdot 60 \text{ min.}$$

$$\approx 33 \text{ h } 13 \text{ min.} \quad (1 \text{ p.})$$

Vast. Yhteensä hän harjoittelee 33 h 13 min.