MAB7-Harjoituskoe

RATKAISUT

A-OSA

1. Tarkastellaan funktiota $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9$.

   a) Mikä on funktion arvo kohdassa nolla?

   b) Mikä on funktion derivaatan arvo kohdassa nolla?

   c) Määritä funktion derivaatan nollakohdat.

a)

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9$$
$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 = \underline{\underline{9}}$$

b)

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9$$
$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 0$$
$$= 6x^2 - 12x$$
$$f'(0) = 6 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

c)

$$f'(x) = 0$$
$$6x^2 - 12x = 0$$
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 0}}{2 \cdot 6}$$
$$x = \frac{12 \pm 12}{12}$$
$$\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = 2}}$$

2. Ratkaise epäyhtälöt

a) $2-4x<10$

b) $x^2+2x-3<0$.

a)

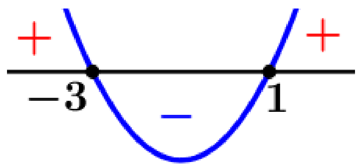
$$2-4x<10 \,||-2$$
$$-4x<8 \,||:(-4)<0!!$$
$$\underline{\underline{x>-2}}$$

b)

$$x^2+2x-3<0$$

Nollakohdat:

$$x^2+2x-3=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{-2\pm 4}{2}$$
$$x=-3 \text{ tai } x=1$$

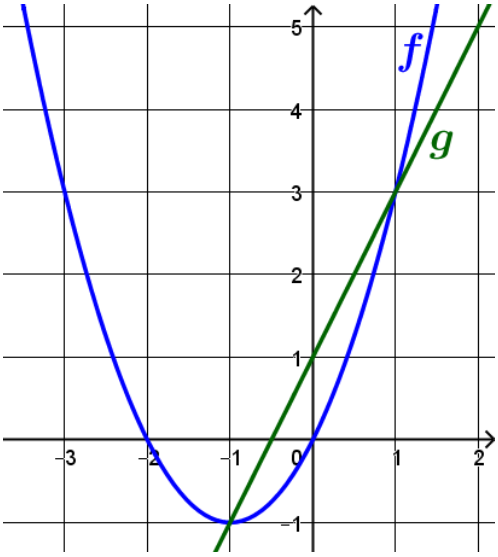


Mallikuvaajasta näemme epäyhtälön ratkaisun:

$\underline{\underline{-3<x<1}}$

B-OSA

1. Tarkastellaan oheisessa kuvassa olevan 2. asteen polynomifunktion $f(x)$ ja 1. asteen polynomifunktion $g(x)$ kuvaajia. Vastaa kuvaajien perusteella kysymyksiin.



a) Mitkä ovat funktion $f(x)$ derivaatan nollakohdat?

b) Mitä on $g(2)$?

c) Mitä on $g'(2)$?

d) Mikä on epäyhtälön $f(x) \geq g(x)$ ratkaisu?

e) Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x)$ on vähenevä?

f) Määritä funktion $f(x)$ ääriarvokohdat ja niiden luonne.

a) $\underline{\underline{x=-1}}$

b) $g(2)=\underline{\underline{5}}$

c) $g'(2)=\underline{\underline{2}}$ (suoran tangentti on suora itse! Suoran kulmakerroin = 2)

d) $\underline{\underline{x \leq -1 \quad \text{tai} \quad x \geq 1}}$

e) $\underline{\underline{x \leq -1}}$

f) Funktiolla $f(x)$ on $\underline{\underline{\text{minimikohta } x=-1}}$.

2. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 10$.

a) Laadi funktion kulkukaavio.

b) Mikä on funktion suurin arvo välillä $0 \le x \le 2$?

c) Millä muuttujan x arvoilla funktio on vähenevä?

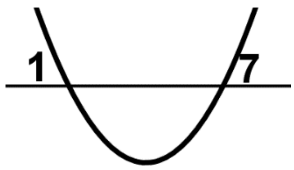
a)

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 10$$
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 21$$

Derivaatan nollakohdat:

$$3x^2 - 24x + 21 = 0$$
$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 21}}{2 \cdot 3}$$
$$= \frac{24 \pm 18}{6}$$
$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 7$$

Päätellään derivaatan merkit sen tyyppikuvaajasta.



Kulkukaavio:

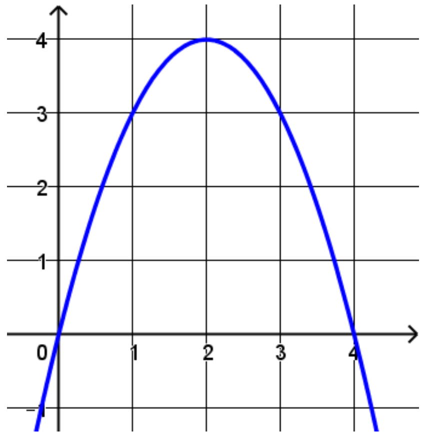
	1	7	
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

b) Kulkukaaviosta nähdään, että välillä $0 \le x \le 2$ funktio $f(x)$ saa suurimman arvon kohdassa $x = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 + 10 = \underline{\underline{20}}$$

c) Funktio on vähenevä, kun $\underline{\underline{1 \le x \le 7}}$.

3. Tarkastellaan oheista kuvaajaa.



a) Jos kuvassa on funktion $f(x)$ kuvaaja, niin millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x)$ on kasvava?

b) Jos kuvassa on funktion $f'(x)$ kuvaaja, niin millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x)$ on kasvava?

a) Funktio $f(x)$ on kasvava, kun $\underline{\underline{x \le 2}}$.

b) Nyt kuvassa on derivaatan $f'(x)$ kuvaaja. Funktio $f(x)$ on kasvava, kun derivaatta $f'(x) \ge 0$. Näin on, kun $\underline{\underline{0 \le x \le 4}}$.

4. Määritä derivaatan avulla paraabelin $g(x) = -3x^2 + 15x + 42$ huipun koordinaattien tarkat arvot murtolukuina.

Huipussa tangentti on vaakasuora eli derivaatta on 0.

$$g(x) = -3x^2 + 15x + 42$$
$$g'(x) = -6x + 15$$

$$g'(x) = 0$$
$$-6x + 15 = 0$$
$$x = \frac{15}{6}$$
$$x = \frac{5}{2}$$

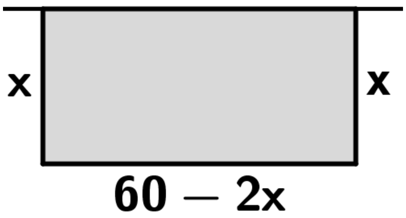
Huipun $y-$koordinaatti saadaan sijoittamalla saatu x alkuperäiseen funktioon:

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = -3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 42$$
$$= \frac{243}{4}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Huippu on pisteessä } \left(\frac{5}{2}, \ \frac{243}{4}\right)}}$

5. Seinän viereen rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus. Aitaa tarvitaan kolmelle sivulle ja sitä on käytettävissä 60 m. Miten aitauksen mitat kannattaa valita, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

Mallikuva:



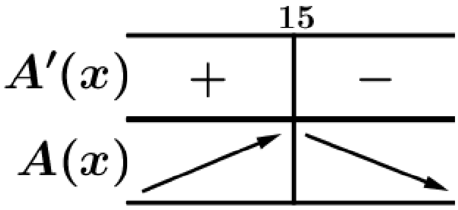
Olkoon seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus *x* m, jolloin seinän suuntaisen sivun pituus on (60-2*x*) m.

Aitauksen pinta-alafunktio: $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$, missä $0 \leq x \leq 30$.

$$A'(x) = 60 - 4x$$
$$A'(x) = 0$$
$$60 - 4x = 0$$
$$x = 15$$

Kulkukaavio:

Testiluvut: $A'(0) = 60 > 0$ ja $A'(20) = -20 < 0$



Kulkukaaviosta nähdään, että pinta-alafunktio saa suurimman arvonsa, kun $x = 15$.
Tällöin pidempi sivu on $60 - 2 \cdot 15 = 30$ (m).

Vastaus: Aitauksen mitat on valittava niin, että seinää vastaan kohtisuora pituus on 15 m ja seinän suuntainen pituus 30 m.

6. Kirjakauppias myy kirjoja. Kun hän laittoi kirjan hinnaksi 9 € niitä myytiin viikossa 95 kappaletta. Kauppias arvioi, että jokainen euron korotus kirjan hinnassa vähentää myyntiä viidellä kappaleella viikossa. Vastaavasti euron lasku hinnassa nostaa viikkomyyntiä viidellä kirjalla. Yhden kirjan valmistuskustannukset ovat 5,50 €. Mikä kauppiaan kannattaa valita kirjan myyntihinnaksi, jotta myynnistä saatava voitto olisi mahdollisimman suuri?

Hinnan muutos = x (€).

Uusi hinta = $9+x$.

Uusi myyntimäärä = $95-5x$.

Valmistuskustannukset = $(95-5x)\cdot 5,50$

Kokonaisvoittofunktio (tulot – kustannukset):

$$\begin{aligned} f(x) &= (95-5x)\cdot(9+x)-(95-5x)\cdot 5,50 \\ &= -5x^2+77,5x+332,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -10x+77,5 \\ f'(x) &= 0 \\ -10x+77,5 &= 0 \\ x &= 7,75 \end{aligned}$$

Kulkukaavio:
Testiluvut $f'(0)=77,5>0$ $\quad f'(8)=-2,5<0$

	7,75	
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaaviosta nähdään, että kokonaisvoitto on suurin, kun hinnan muutos $x=7,75$ (€).

Kirjat kannattaa myydä siis kappalehintaan $9+7,75=\underline{\underline{16,75\ (€)}}$.

Vastaus: Kirjan myyntihinnaksi kannattaa laittaa 16,75 €.