YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

13.2.2015

MATEMATIIKAN MALLIKOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan omalle puoliarkille. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Suorakulmion muotoisen ruohokentän alkuperäiset mitat ovat 25 m × 11 m. Kenttää laajennetaan joka puolelta yhtä leveillä ruohokaistaleilla.

a) Kuinka leveä kaistaleen tulee olla, jotta kentän pinta-ala olisi laajennuksen jälkeen kaksinkertainen alkuperäiseen verrattuna?

b) Ilmaise yleisemmin kaistan leveys laajennussuhteen funktiona $f(s)$, jolloin siis $f(2)$ antaa a-kohdan vastauksen, $f(3)$ kertoo leveyden, joka antaa kolminkertaisen pinta-alan, jne.

6. Hajamielisellä professorilla on pidettävänään yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä viikossa. Hän muistaa kuitenkin pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.

a) Millä todennäköisyydellä hän muistaa pitää viikon kaikki luentonsa?

b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?

c) Määritä hänen viikossa muistamiensa luentojen lukumäärän odotusarvo.

7. Peter on äskettäin ostanut uuden auton hintaan a €. Auton arvon oletetaan laskevan käytössä vuosittain 15 %.

a) Kuinka monta prosenttia auton arvo on laskenut neljän vuoden jälkeen?

b) Muodosta funktio, joka kuvaa auton arvoa x vuoden jälkeen. Hahmottele funktion kuvaaja välillä 0–15 vuotta.

c) Kuinka monen vuoden jälkeen auton arvo on pudonnut alle viidesosaan alkuperäisestä arvosta?

8. Kahden pallon pinta-alojen suhde on 16 : 25. Määritä niiden tilavuuksien suhde.

9. Ratkaise vaihtoehdoista **i** ja **ii** ***toinen***

i. Konnektiivin # totuustaulu on
Esitä lause $A\#(A\#B)$ sellaisessa muodossa, että siinä esiintyy pelkästään konnektiiveja $\neg, \vee$ tai $\wedge$.

A	B	$A\#B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

ii. Etsi Newtonin menetelmää käyttäen yhtälölle $e^x = 3x$ yksi ratkaisu. Sisällytä myös välivaiheet.

B2-osa **Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.**

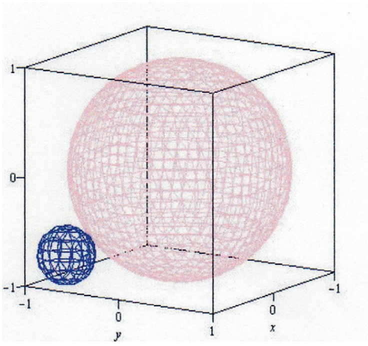
10. **a)** Määritä sellainen kerroin a, että funktio $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\le -1 \\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & x>-1 \end{cases}$ on jatkuva kaikkialla. Onko se tällöin myös derivoituva?

b) Laske niiden kokonaislukujen 1, 2, 3, …, 3^{10000} summa, jotka eivät ole kolmella jaollisia.

11. Määritä ympyröiden $4x^2+4y^2+16x-16y+7=0$ ja $4x^2+4y^2-16x+8y-205=0$

a) keskipisteet (1 p.)
b) säteet (1 p.)
c) yhteisten tangenttien yhtälöt. (4 p.)

12. Oheisen kuution särmän pituus on 2. Sen sisällä on vaaleanpunainen pallo, joka sivuaa jokaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi sininen pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa kuvion mukaisesti. Laske sinisen pallon säteen tarkka pituus.



13. Sanomme, että positiivinen kokonaisluku on *kiva,* jos se on kahden suurimman, eri suuren, aidon tekijänsä summa. Luvun n aidolla tekijällä tarkoitetaan lukua k, joka jakaa luvun n ja jolle pätee $1<k<n$. Osoita, että näillä määritelmillä mikään luku ei ole *kiva*.