

Ratkaisut

MAA4 – VÄLITESTI 4

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisumonisteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta. Jos sait vähintään 9/12 pistettä, olet valmis siirtymään seuraavaan osioon! Kertaa tarvittaessa.

1. Ratkaise [tämän](#) sovelluksen avulla, millä vakion a arvolla suorat $ax + 2y - a^2 = 0$ ja $a^2x + 4y + a^2 + 8 = 0$ ovat yhdensuuntaiset. (3p.)

Ratkaisu:

Kuvaajan perusteella suorat näyttäisivät olevan yhdensuuntaiset, kun $a = 0$ tai $a = 2$. (3p.)

2. Ratkaise algebrallisesti (ilman sovellusta), millä vakion a arvolla suorat $ax + 2y - a^2 = 0$ ja $a^2x + 4y + a^2 + 8 = 0$ ovat yhdensuuntaiset. (3p.) (Taso: **HYVÄ**)

Ratkaisu:

- a) Muutetaan suoran yhtälöt ratkaistuun muotoon:

$$ax + 2y - a^2 = 0$$

$$2y = -ax + a^2$$

$$y = -\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a^2$$

$$a^2x + 4y + a^2 + 8 = 0$$

$$4y = -a^2x - a^2 - 8$$

$$y = -\frac{1}{4}a^2x - \frac{1}{4}a^2 - 2$$

Kulmakertoimet ovat siten $\frac{1}{2}a$ ja $\frac{1}{4}a^2$. Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat. Saadaan yhtälö:

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a$$

$$a^2 = 2a$$

$$a^2 - 2a = 0$$

$$a(a - 2) = 0$$

$$a = 0 \text{ tai } a = 2$$

Vastaus: suorat ovat yhdensuuntaiset, kun $a = 0$ tai $a = 2$.

3. Ratkaise **tämän** sovelluksen avulla, millä vakion a arvolla suora $x + y - a^2 = 0$ on ympyrän $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2$ tangentti. (3p.)

Ratkaisu:

Kuvaajan perusteella näyttäisi siltä, että suora $x + y - a^2 = 0$ on ympyrän $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2$ tangentti, kun $a = 4$. (3p.)

4. Ratkaise algebrallisesti (ilman sovellusta), millä vakion a arvolla suora $x + y - a^2 = 0$ on ympyrän $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2$ tangentti. (3p.) (Taso: KIITETTÄVÄ)

Ratkaisu:

Suora on ympyrän tangentti, kun suoralla ja ympyrällä on tasan yksi leikkauspiste. Ratkaistaan leikkauspisteet yhtälöparin avulla:

$$\begin{cases} x + y - a^2 = 0 \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2 \end{cases}$$

Muutetaan ympyrän yhtälö normaalimuotoon ja suoran yhtälö ratkaistuu muotoon:

$$\begin{cases} y = -x + a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = -x + a^2$ ympyrän yhtälöön:

$$\begin{aligned} x^2 + (-x + a^2)^2 - 2ax - 2a(-x + a^2) &= 0 \\ x^2 + x^2 - 2a^2x + a^4 - 2ax + 2ax - 2a^3 &= 0 \\ 2x^2 - 2a^2x + a^4 - 2a^3 &= 0 \end{aligned}$$

Kyseessä on toisen asteen yhtälö x :n suhteen, jolla on täsmälleen yksi ratkaisu, kun diskriminantti saa arvon nolla

$$\begin{aligned} (-2a^2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^4 - 2a^3) &= 0 \\ 4a^4 - 8a^4 + 16a^3 &= 0 \\ -4a^4 + 16a^3 &= 0 \\ -4a^3(a - 4) &= 0 \\ a = 0 \text{ tai } a = 4 \end{aligned}$$

Ratkaisu $a = 0$ ei käy, koska tällöin yhtälö $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2$ ei esitä ympyrää (vaan pistettä $(0,0)$).

Vastaus: $a = 4$ (3p.)